Cajasol

oposiciones 2008

MATEMÁTICAS FINANCIERAS

ÍNDICE

(El texto señalado con sombreado no es materia de examen, pero si es material de consulta y apoyo al estudio:
Ejemplo: Los rendimientos derivados de la transmisión o reembolso de….

De igual manera, los ejemplos ayudan a la comprensión del módulo, pero no son materia de examen)

1. INTRODUCCIÓN

En este tema estudiarás algunos conceptos básicos para entender qué variables del entorno económico influyen en las inversiones y cuáles son los fundamentos de cálculo que permiten medir la evolución de una determinada inversión y su rendimiento.

Por eso, se tratan dos aspectos diferentes:

- *Fundamentos matemáticos*

  El dinero es como una mercancía que se puede comprar y vender; por eso tiene un precio. En realidad, el dinero se presta y el precio del préstamo son los intereses. Tomar prestado y prestar dinero, a cambio de unos intereses, es una de las principales actividades de las entidades financieras.

  Se estudian las operaciones más habituales de cálculo realizadas a interés simple y compuesto y, como ejemplo de aplicación, te propondremos algunos ejercicios prácticos que deberás resolver con ayuda de la calculadora científica.

- *Medidas de la rentabilidad*

  El objetivo final de cualquier inversión es conseguir un rendimiento o rentabilidad. Verás que existen diferentes magnitudes que permiten medirla a través de indicadores numéricos.

2. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Quien dispone de dinero puede sacarle un rendimiento depositándolo en una entidad financiera o prestándolo a un tercero. A cambio, al cabo de un tiempo, recibirá una cantidad superior.

Cualquier persona preocupada por el rendimiento de su dinero se puede preguntar: ¿cuáles son las ganancias que obtendré por depositar mi dinero en una entidad financiera?, ¿de qué factores dependen esas ganancias?, ¿cuánto me ahorraría por adelantar el pago de una deuda en lugar de esperar a su vencimiento?, ¿qué cantidad he de desembolsar periódicamente para tener, al cabo de un tiempo, cierto capital?...

El cálculo financiero permite dar respuesta a estas preguntas.

En el apéndice encontrarás, ordenadas y numeradas, todas las fórmulas que se emplean en la explicación. Podrás consultarlas siempre que lo creas conveniente.

2.1. Valor temporal del dinero

Abrir una cuenta de ahorro, suscribir un plan de pensiones, comprar Deuda Pública, descontar una letra de cambio u obtener un préstamo hipotecario son ejemplos de operaciones financieras.

En el caso de un préstamo hipotecario, la entidad financiera entrega al cliente un determinado capital que recuperará gradualmente mediante cuotas periódicas. El importe total de esas cuotas periódicas será superior al capital prestado, ya que incluye los intereses del mismo por el tiempo en que ha estado a disposición del beneficiario del préstamo.

El préstamo hipotecario es un claro ejemplo de operación financiera.

Básicamente, una operación financiera consiste en un intercambio de dinero en el que la entrega y la recuperación tienen lugar en fechas distintas.

El valor del dinero depende del momento en que se dispone de él. Por eso, un *capital financiero* es el conjunto de dos variables: un importe y una fecha de disponibilidad.

Cada capital va asociado a una fecha y tiene el valor monetario que indica sólo para aquella fecha. Es decir, 800,00 EUR del 4 de enero no valen lo mismo que 800,00 EUR del 20 de marzo. Dos cantidades de dinero son comparables sólo si se sitúan en el mismo momento.

Si un capital no devenga intereses, es preferible cobrarlo cuanto antes o pagarlo lo más tarde posible.

Cuanto antes se disponga del dinero, antes se podrá utilizar. Ese uso del dinero puede consistir en:

- *Gastarlo*, obteniendo así una satisfacción o utilidad.

- *Invertirlo*, obteniendo un rendimiento (por ejemplo, contratando determinado producto financiero).

Es lógico, pues, que quien presta su dinero a otro pretenda recibir, en el momento de recuperarlo, una cantidad mayor que la prestada.

Quien presta dinero renuncia durante cierto tiempo a gastarlo o a obtener un rendimiento en otras inversiones alternativas. Por el contrario, quien lo recibe tiene la oportunidad de utilizarlo (gastarlo o invertirlo) durante ese mismo tiempo. Por eso, es razonable que quien recibe el dinero compense económicamente a quien lo presta. Se trata de *pagarle* por la renuncia a disponer de su dinero. En términos económicos se dice que se compensa el *coste de oportunidad*.

Quien presta dinero se llama *prestamista* o *acreedor*. Quien lo recibe, *prestatario* o *deudor*.

Una persona que deposita dinero en un banco renuncia a disponer temporalmente de su dinero y se convierte en acreedora del banco.

2.1.1. Intereses y tipo de interés

He aquí un ejemplo sencillo de operación financiera: un cliente deposita 6 000,00 EUR en una libreta de ahorro de un banco durante un año. Al cabo de ese tiempo recupera 6 120,00 EUR; esos 120,00 EUR adicionales son los intereses que ha pagado el banco por disponer durante un año de un dinero que no es suyo. A su vez, el cliente los ha cobrado para compensar su renuncia a disponer de ese mismo dinero.

Se llama *tipo de interés* al rendimiento producido por una unidad de capital en una unidad de tiempo. Es el precio unitario de la operación.

Por lo tanto, conociendo el importe de un capital y los intereses, o precio total, que devenga durante un periodo de tiempo, por ejemplo un año, podemos calcular el *tipo de interés anual* dividiendo estos intereses por el capital prestado.

En cálculo financiero, el concepto de *capital* indica los recursos empleados en una operación financiera. Estos recursos pueden ser dinero u otros bienes, que siempre se valoran en dinero. Por eso puede utilizarse indistintamente, y con el mismo significado, capital y dinero.

En las fórmulas de cálculo financiero utilizaremos el tipo de interés expresado en tanto por uno, aunque lo más común es hablar de *porcentajes* o tantos por ciento. Convertir un tanto por ciento en tanto por uno es muy fácil: basta con dividir por 100 el porcentaje o tanto por ciento.

Al tipo de interés también se le llama *rédito, tasa o tanto de interés.* En este curso lo llamaremos siempre *tipo de interés* y lo representaremos por la letra *i.*

Cuando el plazo de la operación es de un año, el tipo de interés se denomina *tipo de interés nominal*. Cuando es inferior a un año, se denomina *tipo de interés efectivo* y hace referencia al periodo. Así, por ejemplo, si los intereses producidos por 1 000,00 EUR durante 6 meses han sido 30,00 EUR, hablamos de un tipo de interés efectivo semestral del 3 %.

2.1.2. Capitalización y descuento

Cuando una entidad financiera presta un capital, lo recupera más tarde incrementado con los correspondientes intereses. Es lo que ocurre habitualmente en las operaciones de préstamo.

Cuando una empresa presenta al descuento a su entidad financiera una letra de cambio, recibirá una cantidad inferior al nominal que figura en la letra.

- Al calcular el valor futuro de un capital actual se suman a éste los intereses que devengará.
- Al calcular el valor actual de un capital futuro se resta de éste el importe de los intereses que todavía no ha devengado.

El aplazamiento o el anticipo de un capital dan lugar a operaciones financieras de *capitalización* y *actualización* (o *descuento*), respectivamente.

Capitalizar es sumar a un capital actual (préstamo o inversión) los intereses devengados.

Actualizar o *descontar* es restar de un capital futuro los intereses que éste todavía no ha devengado.

Al capital actual se le llama también *capital inicial*, y al capital futuro, *capital final*.

La diferencia entre el capital futuro (o final) y el capital actual (o inicial) son los *intereses*.

En algún caso, utilizaremos algunos gráficos para representar operaciones financieras de capitalización y descuento.

Puesto que el valor de un capital depende de la fecha en que pueda disponerse de él, en esos gráficos aparecerán siempre:

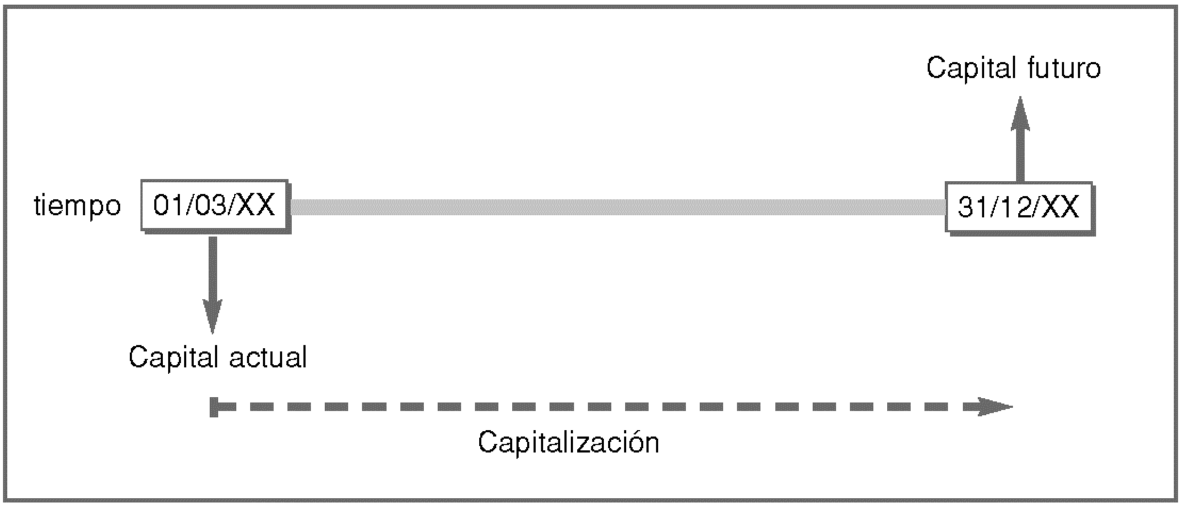
- Los capitales que intervienen en la operación.
- La fecha de disponibilidad de cada capital.

Sobre una línea horizontal, que indica el discurrir del tiempo, se marcarán las fechas. Los capitales se representarán mediante líneas perpendiculares a la línea del tiempo; las orientadas hacia abajo indican capitales actuales o iniciales, mientras que las orientadas hacia arriba indican capitales futuros o finales.

Esta forma de representación es convencional; en otros casos (por ejemplo, cuando se indican cobros y pagos) el significado de las líneas podrá ser distinto.

Por ejemplo:

La capitalización, representada en el gráfico siguiente, la indicamos mediante una línea discontinua que refleja la conversión de un capital actual en otro capital futuro:

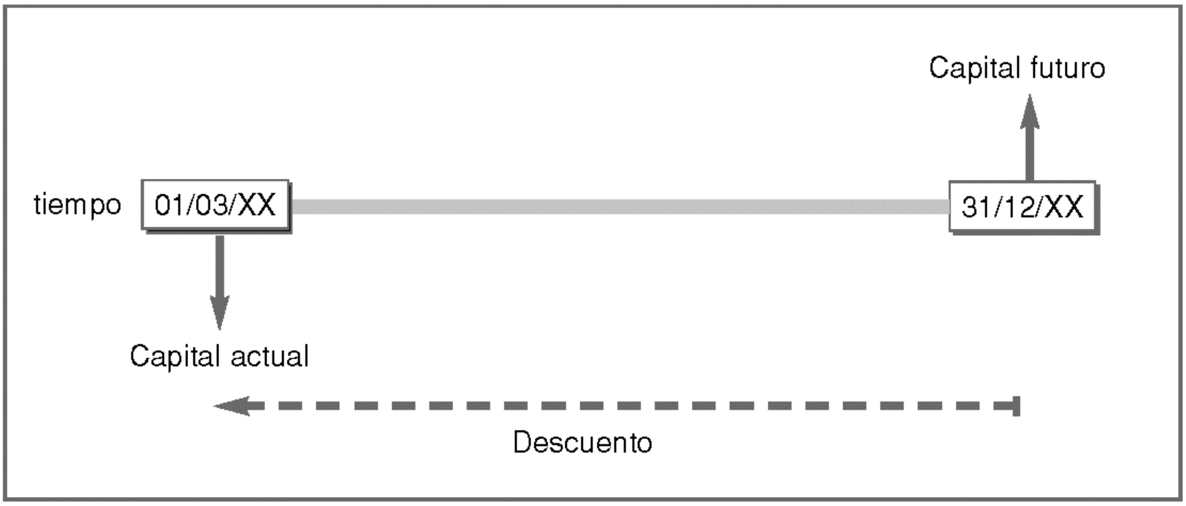


En la capitalización se cumple que:

Capital futuro = Capital actual + Intereses

La persona que adelanta el pago de un capital deberá abonar una cantidad inferior a la que le correspondería si lo hiciera efectivo en su fecha de vencimiento. El descuento que obtiene equivale a los intereses que habría devengado el capital durante el tiempo en que ha avanzado su pago.

A esta operación se le llama *descuento* y la representamos gráficamente mediante una línea que indica la conversión de un capital futuro en otro capital actual:



En la operación de descuento se cumple que:

Capital actual = Capital futuro – Descuento

Puesto que en la operación de descuento se calcula el valor de un capital actual, se dice también que es una *operación de actualización*.

Financieramente, *descontar* y *actualizar* son términos sinónimos, aunque nosotros nos referiremos normalmente al descuento en operaciones inferiores a un año (que se calculan a interés simple) y hablaremos de actualización en operaciones superiores a un año (que se calculan a interés compuesto).

Casi todo el cálculo financiero se basa en operaciones de capitalización y descuento, con las variantes que estudiarás a lo largo del curso.

2.1.3. Interés simple y compuesto

En toda operación financiera deben considerarse dos aspectos importantes: el periodo de cálculo de intereses y el modo de liquidación de estos intereses. Es decir, con qué periodicidad deben calcularse y cómo se liquidan (pagan o cobran) dichos intereses.

El cálculo de intereses puede realizarse sólo una vez, al acabar el periodo de duración de la operación, o bien por fracciones de este periodo total (meses, trimestres, semestres, años).

El i*nterés simple* consiste en el cálculo de intereses sobre todo el periodo de la operación y su liquidación de una sola vez.

El *interés compuesto* consiste en el cálculo de intereses sobre cada periodo de cálculo y la acumulación de estos intereses al capital inicial de ese periodo, lo que da lugar a un nuevo capital sobre el cual calcular los nuevos intereses. Los intereses se capitalizan en cada periodo de liquidación.

El resultado obtenido para una misma operación varía sensiblemente según se calcule por interés simple o compuesto. El anexo 5 muestra esta diferencia.

No debemos confundir el modo de cálculo de los intereses (compuesto o simple) con la capitalización de estos intereses. La mayoría de los productos financieros suelen calcular los intereses por el método simple y los intereses devengados pueden capitalizarse y generar un nuevo capital (hablamos entonces de productos de capitalización, como los planes de pensión) o bien liquidarse manteniendo íntegro el capital inicial (caso de la mayoría de los productos financieros).

En el cálculo de actualización a interés compuesto, las cantidades calculadas en cada periodo se van deduciendo del capital. Así, el capital es cada vez menor y produce sucesivamente menores descuentos.

Recuerda que actualización y descuento significan lo mismo pero, por razones didácticas, utilizaremos normalmente «actualización» en interés compuesto y «descuento» en interés simple.

2.2. Capitalización a interés simple

A pesar de que el cálculo de los intereses es, probablemente, una operación que dominas, la repasaremos aquí para:

- Establecer los criterios que vamos a seguir en el uso de las unidades de tipo de interés y de tiempo.

- Mostrar cómo se procede cuando el capital o el tipo de interés varían a lo largo del periodo de capitalización.

Ten en cuenta que la capitalización a interés simple suele utilizarse o aplicarse en operaciones cuya duración es igual o inferior a un año.

2.2.1. Fórmulas generales

Los intereses producidos por un capital dependen del:

- Valor del propio capital.
- Tipo de interés al que se remunera.
- Tiempo que dura la capitalización.

Así, pues, la fórmula matemática que permite calcular los intereses es:

$I = C_0 \cdot i \cdot n$ **[1]*** A partir de ahora ten en cuenta que los números que aparecen entre corchetes al lado de cada fórmula se corresponden con los del formulario que encontrarás en el apéndice. Puedes consultar dicho apéndice cuando lo necesites.

siendo:

I = Valor de los intereses.

C_0 = Capital inicial (valor del capital al principio del periodo de capitalización).

i = Tipo de interés expresado en tanto por uno (interés producido por 1 EUR de capital) y referido a un año. Es el tipo de interés nominal.

n = Tiempo, expresado en años, de duración de la capitalización.
Si el tipo de interés se expresa en tanto por ciento, la fórmula será:

$$I = \frac{C_0 \cdot i \cdot n}{100}$$

Aunque en la práctica los tipos de interés suelen indicarse en tanto por ciento, en las fórmulas que manejaremos lo haremos siempre en tanto por uno, ya que resulta más cómodo para escribirlas y hacer los cálculos.

Para calcular el tipo de interés nominal hay que despejar el valor de i en la fórmula general:

$$I = C_0 \cdot i \cdot n$$

Por tanto:

$$i = \frac{I}{C_0 \cdot n} \qquad \textbf{[2]}$$

De forma similar a como hemos despejado i, se puede deducir de la fórmula general el valor de n o el de C_0:

$$n = \frac{I}{C_0 \cdot i} \qquad \textbf{[3]}$$

$$C_0 = \frac{I}{i \cdot n} \qquad \textbf{[4]}$$

El *capital final* es la cantidad de dinero obtenida al final del periodo de capitalización. Lo representaremos por C_n.

Como $C_n = C_0 + I$, se puede sustituir I por $C_0 \cdot i \cdot n$, con lo que:

$$C_n = C_0 + C_0 \cdot i \cdot n$$

y, sacando el capital inicial C_0 como factor común:

$$C_n = C_0\,(1 + i \cdot n) \qquad \textbf{[5]}$$

Para resolver un problema de capitalización hay que proceder de la siguiente forma:

1. Identificar la incógnita o el dato a calcular. Puede ser C_n, C_0, I, i o n.

2. Identificar los datos conocidos y sus valores.

3. Seleccionar la fórmula adecuada.

4. Sustituir, en la fórmula seleccionada, los valores de los datos conocidos.

5. Realizar los cálculos necesarios para hallar el resultado, es decir, el valor de la incógnita.

(En realidad, éste es el procedimiento a seguir para resolver cualquier problema de los que veremos a lo largo de este tema.)

I se puede calcular por diferencia entre C_n y C_0, por lo que:

$$n = \frac{C_n - C_0}{C_0 \cdot i} \qquad \textbf{[8]}$$

Es importante destacar que en la fórmula general, $I = C_0 \cdot i \cdot n$, y en las fórmulas derivadas, el tipo de interés (i) y el tiempo (n) deben referirse a la misma unidad de tiempo. Es decir, si el tipo de interés es un tanto por uno anual el tiempo debe indicarse también en años.

Si el tipo de interés y el tiempo se refieren a unidades de tiempo distintas, antes de sustituir los valores de i y n hay que homogeneizar dichas unidades.

Te aconsejamos que te acostumbres siempre a expresar ambas magnitudes en años, de acuerdo con las siguientes reglas:

- Si el tipo de interés es efectivo, porque se refiere a una unidad de tiempo inferior al año (por ejemplo, tanto por uno mensual), hay que multiplicar el tipo de interés por el número de veces que esa unidad de tiempo cabe en un año. De este modo, obtendremos el tipo de interés nominal. Ejemplos:

  – Un interés efectivo mensual de 0,01 por uno equivale a un tipo de interés nominal o anual de 0,12 por uno (0,01 · 12 meses = 0,12 anual).

  – Un interés efectivo trimestral de 0,035 por uno equivale a un tipo de interés nominal o anual de 0,14 por uno (0,035 · 4 trimestres = 0,14 anual).

- Si el tiempo se refiere a una unidad inferior al año (meses, trimestres, etcétera), hay que dividirlo por el factor que indica el número de veces que esa unidad cabe en un año. Ejemplos:

  – 18 meses = 1,5 años (18 : 12 meses = 1,5 años)

  – 3 trimestres = 0,75 años (3 : 4 trimestres = 0,75 años)

En interés simple es lo mismo hablar de un 0,06 por uno semestral que de un 0,12 por uno anual o un 0,01 por uno mensual. (En cambio, esta regla no es válida para el interés compuesto.)

Para convertir los días en años puede utilizarse el divisor 360, si se considera el año comercial (12 meses de 30 días), o el divisor 365, si se considera el año natural. En banca se emplea uno u otro divisor dependiendo de la operación financiera a realizar. Nosotros utilizaremos, de momento, siempre el año natural. Por tanto, el divisor será generalmente 365, cuando el tiempo se exprese en días.

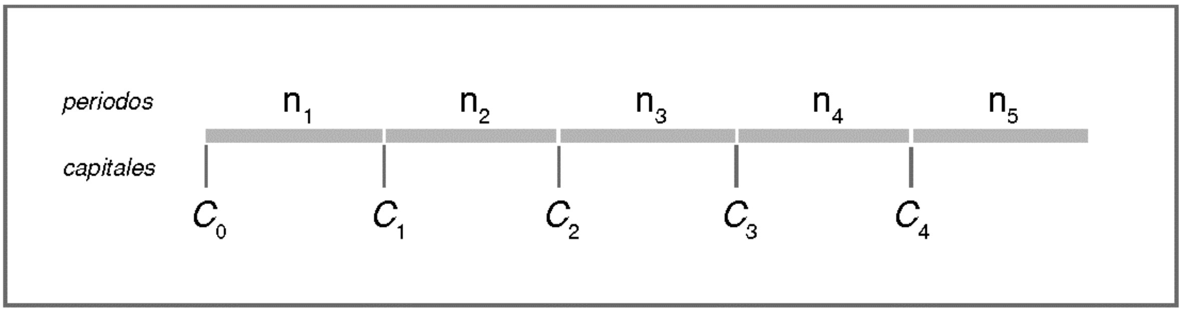
Hay que destacar también que, cuando se hable de periodos de tiempo comprendidos entre dos fechas, deben calcularse los días de calendario exactos para luego transformarlos en años. Así, entre el día 3 de marzo y el 20 de abril hay 48 días, es decir –redondeando decimales– 0,132 años (48 : 365).

2.2.2. Variaciones en el capital. Números comerciales

En las operaciones de capitalización puede ocurrir que, a lo largo del tiempo, varíe el capital o el tipo de interés, o ambas cosas a la vez. La variación del tipo de interés es menos frecuente y hablaremos de ella más adelante. Bastante más corriente es la variación del capital; un caso típico es el de la cuenta corriente bancaria, que suele registrar frecuentes movimientos de dinero.

Para calcular los intereses, en ese caso, hay que considerar tantos periodos como capitales distintos existan a lo largo del tiempo de capitalización. Después se sumarán los intereses de todos los periodos.

Gráficamente, la operación puede resumirse de este modo:



Dividimos el tiempo total en tantos periodos (n_1, n_2, n_3...) como capitales distintos existan (C_0, C_1, C_2...).

Hasta ahora, habíamos denominado C_0 al capital inicial y C_n al capital final de una operación de capitalización. En el gráfico que acabamos de ver, hay varios capitales y, en consecuencia, varios periodos, de modo que el capital inicial de un periodo se corresponde con el capital final del periodo inmediatamente anterior. Por tanto:

- En el periodo n_1 el capital inicial es C_0 y el final, C_1.
- En el periodo siguiente, n_2, el capital inicial es C_1 y el final, C_2.
- Y así sucesivamente.

El capital inicial C_0 permanece sin variación durante el tiempo n_1. Después, se ingresa o reintegra dinero obteniéndose otro capital C_1 que permanece durante otro periodo n_2. El siguiente movimiento da lugar a otro capital C_2 durante un tiempo n_3, etcétera.

En cada uno de los cinco periodos se producen, respectivamente, los intereses I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, pero consideramos que *no se suman al capital* porque éste es un caso de interés simple. La suma de $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5$ son los intereses simples totales devengados durante el tiempo total de capitalización.

Los intereses de cada periodo serán, respectivamente:

$I_1 = C_0 \cdot i \cdot n_1$
$I_2 = C_1 \cdot i \cdot n_2$
$I_3 = C_2 \cdot i \cdot n_3$
$I_4 = C_3 \cdot i \cdot n_4$
$I_5 = C_4 \cdot i \cdot n_5$

Por tanto, la fórmula para hallar la suma de intereses de todos los periodos será:

$$I = (C_0 \cdot i \cdot n_1) + (C_1 \cdot i \cdot n_2) + (C_2 \cdot i \cdot n_3) + (C_3 \cdot i \cdot n_4) + (C_4 \cdot i \cdot n_5)$$

Se trata, en definitiva, de aplicar la fórmula del interés simple para cada uno de los periodos. El tipo de interés (i) es común, pero cada capital y tiempo de capitalización pueden ser distintos. Por esto, se puede sacar i como factor común, obteniéndose:

$$I = i\,(C_0 \cdot n_1 + C_1 \cdot n_2 + C_2 \cdot n_3 + C_3 \cdot n_4 + C_4 \cdot n_5)$$

El producto de cada capital por el tiempo de su respectivo periodo $C_0 \cdot n_1$, $C_1 \cdot n_2$... recibe el nombre de *número comercial*; lo representaremos

por la letra N. Así,

$$N_1 = C_0 \cdot n_1,\ N_2 = C_1 \cdot n_2... \qquad \textbf{[9]}$$

En el cálculo de los números comerciales de cuentas corrientes bancarias el tiempo *se expresa en días*, puesto que el capital puede variar a diario.

La utilización de números comerciales nos lleva a la fórmula,

$$I = i\,(N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5)$$

La aplicación de esta fórmula resulta más sencilla que calcular los intereses de cada capital distinto.

Los números comerciales se calculan con el tiempo expresado en días. Como el tipo de interés se refiere al año, habrá que dividir los números comerciales por 365, para convertirlos en años:

$$I = i \cdot \frac{N_1 + N_2 + N_3 + ... + N_n}{365} \qquad \textbf{[10]}$$

De este modo, el tipo de interés y el tiempo vienen referidos al año.

Otra forma de hallar los intereses de una cuenta se basa en el cálculo del *saldo medio acreedor*. Volvamos al ejemplo anterior.

Saldo	Días
2 580,00 EUR	20
3 300,00 EUR	35
2 700,00 EUR	80
4 200,00 EUR	60
	195

Se procede del siguiente modo:

1. Se calcula el saldo medio

$$\text{Saldo medio} = \frac{2\,580{,}00 \cdot 20 + 3\,300{,}00 \cdot 35 + 2\,700{,}00 \cdot 80 + 4\,200{,}00 \cdot 60}{195}$$

Saldo medio = 3 256,92 EUR

$$\text{Es decir: Saldo medio} = \frac{\text{Números comerciales}}{\text{Periodo total}}$$

2. Se hallan los intereses considerando que el capital inicial es igual al saldo medio

$$I = C_0 \cdot i \cdot n = 3\,256{,}92 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{195}{365} = 52{,}20 \text{ EUR}$$

Hasta ahora hemos supuesto que el tipo de interés permanecía constante. Normalmente es así, pero a veces las circunstancias de los mercados, o la importancia de los saldos de las cuentas, hacen que se modifiquen los tipos de retribución de los depósitos en las entidades financieras.

En ese caso, se dividirá el tiempo en tantos periodos como variaciones de tipo de interés haya habido y se calcularán intereses para cada uno, aplicando su tipo correspondiente.

Otro motivo que obliga a aplicar un tipo de interés variable son los depósitos que se remuneran por tramos, según la cuantía del saldo. Por ejemplo: los primeros 1 000,00 EUR no tienen ninguna retribución; desde 1 000,01 a 5 000,00, el 1 % anual; desde 5 000,01 hasta 10 000,00, el 2 %; desde 10 000,01 en adelante, el 4 %.

El tipo de interés variable puede aplicarse por distintos motivos. Hemos visto los dos principales.

En cualquier caso se dividirá el tiempo de capitalización en tantos periodos como sea necesario y se aplicará, a cada uno, su tipo de interés.

2.2.3. Interés simple anticipado

Lo más normal es que los intereses se cobren al final del periodo de capitalización. Pero también pueden cobrarse al principio.

Este hecho, extraño en apariencia pero frecuente en la vida real, ocurre cuando se coloca un capital en una entidad financiera y se recibe como remuneración algún bien. Este bien se recibe al formalizar la operación y, al final, se recuperará el mismo capital que se colocó.

Supón, por ejemplo, que una banco entrega un aparato de alta fidelidad, cuyo precio de mercado es 230,00 EUR, a aquellos clientes que depositen, durante un año, un capital de 11 500,00 EUR.

En este caso:

- Los intereses de la operación son 230,00 euros (por ser el precio del bien con el que se remunera al cliente).

- El tipo de interés que la entidad ha pagado por anticipado es el 2 %. (Se obtiene dividiendo los intereses entre el capital invertido:
  230,00 / 11 500,00 = 0,02.)

Pero los 230,00 EUR de hoy no son lo mismo que 230,00 EUR de un año después. Por lo tanto, los intereses que hemos calculado (anticipadamente) no serán los mismos que si el cálculo lo hiciéramos al vencimiento.

Para hacer el cálculo al vencimiento, habremos de suponer que el capital inicial
es el capital depositado menos el importe del bien recibido; es decir:
C_0 = 11 500,00 – 230,00 = 11 270,00 EUR.

El tipo de interés anticipado (que indicaremos con el símbolo *i'*) se puede calcular a partir del tipo de interés al vencimiento (que indicaremos con el símbolo *i*), aplicando la fórmula general del descuento:

$$i' = \frac{i}{(1 + i \cdot n)} \qquad \textbf{[11]}$$

A partir de esta fórmula se puede obtener la inversa, que permite conocer el valor de *i:*

$$i = \frac{i'}{(1 - i' \cdot n)} \qquad \textbf{[12]}$$

Así, en el ejemplo anterior:

$i' = 0{,}02$
$n = 1$

$$i = \frac{i'}{(1 - i' \cdot n)} = \frac{0{,}02}{(1 - 0{,}02 \cdot 1)} = 0{,}0204$$

Supón ahora que una entidad financiera, por la imposición de un capital, entrega a sus clientes un determinado bien y, además, al final del periodo paga unos intereses. Estaríamos ante un ejemplo de retribución mixta. Ejemplo: un banco entrega un DVD a los clientes que depositan durante dos años 10 000,00 EUR y, al retirar el capital, paga un interés adicional del 1,5 %.

Para calcular, en estos casos, el tipo de interés total habríamos de sumar al 1,5 % de intereses simples vencidos el equivalente por el valor del DVD. Es decir, calcularíamos el tipo de interés anticipado y lo convertiríamos a tipo de interés al vencimiento, aplicando la fórmula que conoces.

2.3. Capitalización a interés compuesto

Recuerda que:

En la capitalización a interés simple, el tipo de interés se aplica siempre al mismo capital.

En la capitalización a interés compuesto, se considera que los intereses se devengan durante periodos intermedios entre la fecha inicial y la fecha final y que éstos se acumulan al capital en cada periodo, obteniéndose un nuevo capital sobre el cual calcular los intereses del siguiente periodo.

En general, las operaciones financieras utilizan el interés simple, es decir, se calcula el importe de los intereses devengados en cada periodo (estos periodos serán siempre, como máximo, de un año) y estos intereses pueden capitalizarse (sumarse al capital) o bien liquidarse (pagarse o cobrarse).

La capitalización de los intereses en las operaciones financieras es excepcional; suele darse en algunas operaciones de pasivo a largo plazo, como las imposiciones a plazo o los fondos de inversión.

A efectos financieros, que los intereses de un periodo se capitalicen o bien se liquiden es similar.

- En el primer caso, la entidad financiera no paga los intereses del periodo, sino que los acumula al capital y pagará por ello más intereses en los periodos sucesivos.

- En el segundo caso, la entidad pagará en cada periodo los intereses devengados. Por lo tanto, deberá utilizar su tesorería para realizar estos pagos y ello supone un coste financiero adicional para la entidad.

Por esta razón, cuando queremos efectuar un cálculo de capitalización (calcular el valor futuro de un capital actual) en el que intervienen varios periodos de devengo de intereses, siempre es recomendable utilizar el método de los intereses compuestos, independientemente de si los intereses de la operación se han de capitalizar o liquidar en cada periodo.

2..3.1. Fórmulas generales

Una empresa tiene la intención de invertir un capital de 15 000,00 EUR en una cuenta a plazo fijo de un año, remunerada al 3 % anual. Transcurrido el primer año, renovará la imposición acumulando los intereses cobrados al capital inicial. Repetirá la misma al cabo del segundo y el tercer año.

Los cálculos que siguen se refieren a este ejemplo. Ten en cuenta que estamos calculando valores futuros de capitales presentes y no operaciones financieras reales, en las cuales se deberían tener en cuenta aspectos como las retenciones a cuenta sobre intereses.

La acumulación anual de intereses equivale a una capitalización a interés compuesto, aunque el cálculo de intereses lo hagamos a interés simple.

Los intereses obtenidos al final del primer año (I_1) serían:

$I_1 = C_0 \cdot i \cdot n = 15\,000{,}00 \cdot 0{,}03 \cdot 1 = 450{,}00$ EUR

Puesto que esos intereses se añaden al capital, al comienzo del segundo año se dispondrá del capital obtenido al final del primero:

$C_1 = 15\,000{,}00 + 450{,}00 = 15\,450{,}00$ EUR
Los intereses al final del segundo año ($I2$) ascenderán a:

$I_2 = C_1 \cdot i \cdot n = 15\,450{,}00 \cdot 0{,}03 \cdot 1 = 463{,}50$ EUR

En consecuencia, el capital al final del segundo año e inicios del tercero será:

$C_2 = 15\,450{,}00 + 463{,}50 = 15\,913{,}50$ EUR

Si el tiempo de capitalización fuera de 10 años, habría que repetir siete veces más los cálculos anteriores para obtener el importe del capital final.

Para evitar todas esas operaciones puede aplicarse directamente la siguiente fórmula general:

$C_n = C_0\,(1 + i)^n$ **[25]**
siendo:

C_n = capital final (o futuro).
C_0 = capital inicial (o actual).
i = tipo de interés anual (expresado en tanto por uno).
n = tiempo total de capitalización expresado en años.

Recuerda que el número que aparece entre corchetes al lado de cada fórmula es una referencia para localizarla en el apéndice.

Puedes ver, en el anexo 6, cómo se deduce matemáticamente la fórmula anterior.

Como veremos después, para poder aplicar correctamente esta fórmula a la resolución de problemas concretos, es condición imprescindible que los siguientes conceptos estén referidos a una misma unidad de tiempo:

- El tipo de interés (i) (tanto por uno anual, mensual...).
- El tiempo de capitalización (n) (años, meses...).
- El periodo de liquidación de intereses (cada cuánto se calculan: anualmente, mensualmente...).

Si estas tres magnitudes no tienen las mismas unidades, antes de resolver un problema utilizando la fórmula anterior, hay que efectuar alguna transformación previa.

Recordemos las fórmulas generales para calcular el capital final en las dos modalidades de capitalización:

- Interés simple: $C_n = C_0\,(1 + i \cdot n)$ **[5]**
- Interés compuesto: $C_n = C_0\,(1 + i)^n$ **[25]**

Lo que diferencia una fórmula de la otra es el factor que multiplica al capital inicial (C_0). Este factor recibe el nombre de *factor de capitalización*.

El factor de capitalización representa el capital final que se obtiene al cabo de un tiempo, y a un tipo de interés nominal dado, para un capital inicial de 1,00 EUR. Observa que, si $C_0 = 1$, el resultado obtenido para el capital final, en interés compuesto, será $C_n = 1\,(1 + i)^n$; esto es, $C_n = (1 + i)^n$, que corresponde al factor de capitalización.

Cuando el tiempo de capitalización (n) es 1 año, el factor de capitalización a interés compuesto es igual que el factor de capitalización a interés simple.

La afirmación anterior es cierta porque $(1 + i)^n = (1 + i)^1 = 1 + i$ y $(1 + i \cdot n) = (1 + i \cdot 1) =$
$= 1 + i$.

En cambio, cuando el tiempo es superior a 1 año ($n > 1$), el factor de capitalización a interés compuesto es mayor porque

$(1 + i)^n > (1 + i \cdot n)$

Por ejemplo, si $i = 0{,}1$ y $n = 3$, el factor de capitalización a interés compuesto será $(1 + 0{,}1)^3 = 1{,}331$, mientras que el factor de capitalización a interés simple será $(1 + 0{,}1 \cdot 3) = 1{,}3$.

Multiplicando el valor del factor $(1 + i)^n$ por el valor de un capital inicial cualquiera, se obtiene el capital final. Es decir:

Capital inicial		Factor de capitalización		Capital final
C_0	×	$(1 + i)^n$	=	C_n

Si el tipo de interés (i) y el periodo de liquidación de intereses son anuales, el tiempo total de capitalización (n) también deberá expresarse en años. Si figura en otras unidades (meses, días...) deberá tenerse en cuenta que para convertir:

- *Días* en años, se deberán dividir los días entre 365. (O 360, según el caso.)
- *Meses* en años, se deberán dividir los meses entre 12.
- *Trimestres* en años, se deberán dividir los trimestres entre 4.
- Etcétera.

Por ejemplo:

- 60 días son 0,1644 años (60 : 365).
- 6 meses son 0,5 años (6 : 12).
- 4 trimestres son 1 año (4 : 4).
- 1 año y 3 meses son 1,25 años (15:12) .

En algunas ocasiones el dato desconocido o la incógnita del problema puede ser el capital inicial (C_0), el tipo de interés (i) o la duración de la operación (n).

La forma más rápida de calcular el valor del capital inicial (C_0), el tiempo (n) o el tipo de interés (i) consiste en despejar la incógnita correspondiente de la fórmula general:

$C_n = C_0\ (1 + i)^n$

Éstas son las fórmulas resultantes:

Capital inicial (o actual): : $C_0 = \dfrac{C_n}{(1 + i)^n}$ **[27]**

Tipo de interés nominal: $i = \sqrt[n]{\dfrac{C_n}{C_0}} - 1$ **[28]**

Tiempo: $n = \dfrac{\log C_n - \log C_0}{\log\ (1 + i)}$ **[29]**

Éstas son las fórmulas resultantes:

Puedes ver en los anexos 7 y 8 cómo se deducen de la fórmula general las del tipo de interés nominal (i) y tiempo (n). También encontrarás un ejemplo resuelto de la utilización de cada una.

2.3.2. Capitalización periódica de los intereses

Hasta ahora hemos supuesto que los intereses se devengan y liquidan o acumulan al capital que los genera una vez al año. Sin embargo, hay muchos productos financieros (cuentas corrientes y de ahorro, depósitos a plazo, etcétera) que generan intereses con una periodicidad semestral, trimestral, mensual...
Se llama *frecuencia de capitalización* al número de veces que se devengan intereses en un año. Se representa mediante la letra k.

Éstas son las frecuencias de capitalización más corrientes:

Periodo de liquidación	Frecuencia de capitalización (k)
Anual	1
Semestral	2
Trimestral	4
Mensual	12

Cuando la frecuencia de capitalización es superior a 1, hay que tenerlo en cuenta para calcular el valor futuro del capital final aplicando la fórmula general $C_n = C_0\,(1 + i)^n$. En este caso:

- El tipo de interés (i) no será el anual sino el que corresponda a cada periodo de liquidación. Se deberá calcular el tipo de interés efectivo de frecuencia k.

- El tiempo (n) será el número total de periodos (semestres, trimestres, meses...).

Por ello hay que introducir en la fórmula anterior dos modificaciones:

1. El tipo de interés correspondiente a cada periodo no será i (tipo de interés nominal) sino i/k. Así, si la frecuencia es cuatro ($k = 4$), porque se liquidan intereses trimestralmente, en lugar de i se utilizará $i/4$, es decir, el tipo de interés efectivo trimestral.

2. El número total de veces que se devengan y capitalizan intereses no será n sino $n \cdot k$, que es el número total de periodos de devengo.

Por consiguiente, en este caso, la fórmula general a utilizar para calcular el valor del capital final (C_n) será:

$$C_n = C_0\left(1+\frac{i}{k}\right)^{n\cdot k} \qquad \textbf{[30]}$$

Fíjate que cuando k = 1 la fórmula general se reduce a $C_n = C_0\,(1 + i)^n$.

La corrección que acabas de ver tiene que hacerse también en las fórmulas derivadas.

Así, por ejemplo, para calcular el tipo de interés se utilizará la fórmula:

$$i = \left(\sqrt[n\cdot k]{\frac{C_n}{C_0}} - 1\right)\cdot k \qquad \textbf{[31]}$$

Cuanto mayor sea la frecuencia de capitalización a interés compuesto más veces se liquidarán intereses a lo largo del año y, por tanto, más intereses se producirán. Al disminuir la frecuencia de capitalización, ocurre lo contrario.

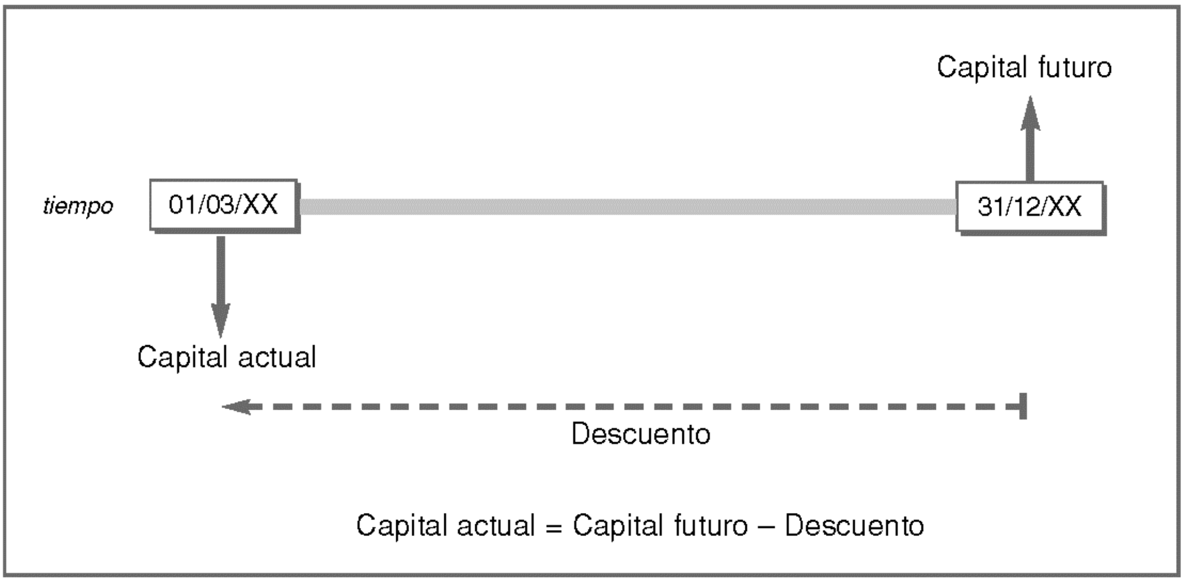
2.4. Descuento simple y comercial

La operación financiera de descuento de capitales se efectúa esencialmente para adelantar la fecha de disponibilidad de un capital.

Veamos un ejemplo: un proveedor de cierta empresa le gira una letra a 90 días para cobrar sus entregas de material. Para disponer antes del dinero, descuenta la letra en una entidad financiera. Ésta le *adelanta* el importe, abonándole una cantidad inferior a la que figura en la letra. (Al llegar el vencimiento, la entidad financiera cobrará la letra a la empresa.)

La forma más habitual de descuento es la que acabamos de describir: una entidad financiera anticipa el importe de un título de crédito aún no vencido (letra de cambio, recibo, pagaré, certificación de obra o servicio...). Al hacer este adelanto, deduce los intereses producidos durante el tiempo que media entre la fecha del anticipo y la del vencimiento del crédito.

Representamos el descuento de este modo:



Al realizar una operación de descuento, el capital conocido es el futuro. Por tanto, hay que calcular el capital actual. La diferencia entre el capital futuro y el capital actual es el descuento.

Observa que el término *descuento* puede utilizarse con dos significados distintos:

- La operación financiera por la que se anticipa el cobro de un capital.
- El importe descontado en esa operación.

Aunque hasta ahora sólo habíamos relacionado el término *intereses* con la capitalización, también representan intereses los importes deducidos en las operaciones de descuento.

El descuento practicado en operaciones comerciales, en concepto de pronto pago, tiene un significado parecido al descuento que practican las entidades financieras: quien vende está dispuesto a aplicar un descuento si cobra antes de lo previsto. Ese descuento corresponde, de algún modo, a los intereses de la cantidad adelantada.

2.4.1. Fórmulas generales

En una operación de descuento, al capital futuro se le suele denominar *valor nominal*, y al capital actual, *valor efectivo*.

El valor efectivo es la diferencia entre el valor nominal (o capital futuro) y el descuento.

Así pues:

Valor efectivo (V_e) = Valor nominal (V_n) – Descuento (D)

Descuento (D) = Valor nominal (V_n) – Valor efectivo (V_e)

En el descuento se utilizan las expresiones *valor nominal* y *valor efectivo* mejor que *capital futuro* y *capital actual*, respectivamente. El descuento corresponde a los intereses que se deducen del valor nominal (V_n). Estos intereses dependen, además de la cuantía del valor nominal (V_n), del tipo de interés nominal aplicado (i) y del tiempo (n) en que se adelanta el pago o el cobro.

A veces, en lugar de tipo de interés nominal (i) se habla de *tipo de descuento nominal* (d). Nosotros utilizaremos siempre la expresión *tipo de interés nominal* (i).

A continuación propondremos un divisor de 360 días en los cálculos del descuento, cuando hasta ahora habíamos utilizado un divisor de 365 días. Las entidades financieras utilizan el divisor de 365 días cuando calculan intereses de operaciones de pasivo (tratadas hasta ahora) y de 360 días cuando se trata de calcular operaciones de activo, como es el caso del descuento comercial.

Utilizando los símbolos ya citados (D, V_n, i y n), y suponiendo que el tipo de interés se exprese en tanto por uno anual (o tipo de interés nominal), la fórmula que permite calcular el descuento es:

$D = V_n \cdot i \cdot n$ **[16]**

Esta fórmula es igual que la que hemos utilizado para el cálculo de los intereses producidos por un capital; la única diferencia está en que, en lugar del capital inicial (C_0), utilizamos el valor nominal del efecto (V_n).

De la fórmula general $_n \cdot i \cdot n$, se pueden despejar los valores de V_n, i o n. Consulta en el apéndice las fórmulas derivadas [17] a [19].

Cuanto más tiempo se adelanta el cobro de un efecto comercial, mayor será el importe del descuento.

El descuento del que aquí hablamos tiene sentido para periodos de tiempo cortos: días o meses, sin llegar a sobrepasar un año. Cuando el tiempo de adelanto de un capital es superior al año, suele aplicarse el interés compuesto. Hablaremos de él más adelante.

2.4.2. Descuento comercial y descuento racional

La persona o empresa que descuenta dispone de un capital que es el valor efectivo (V_e) y no el valor nominal (V_n), que para él es un capital teórico. Por tanto, parecería razonable que los intereses (es decir, el descuento) se calcularan sobre el valor efectivo y no sobre el nominal.

(Si el tipo de interés se aplicase sobre el valor efectivo, en lugar de hacerlo sobre el valor nominal, el importe del descuento sería inferior ya que el valor efectivo es siempre inferior al valor nominal.)

El descuento calculado sobre el valor nominal (V_n) se llama *descuento comercial* o *bancario* (es el que se aplica normalmente). Cuando se calcula sobre el valor efectivo (V_e), se llama *descuento racional* o *matemático*.

La fórmula del descuento racional es, por tanto:

$D = V_e \cdot i \cdot n$ **[20]**

Se llama *descuento racional* porque, como hemos explicado, parece más "razonable" calcular los intereses sobre el valor efectivo, que es el capital que realmente percibe quien solicita el descuento.

Pero existe un pequeño problema para calcular el descuento racional mediante la fórmula anterior: es necesario conocer el valor efectivo, cuando lo normal es que no se sepa más que el valor nominal. Sin embargo, existe una fórmula que permite obtener el descuento racional conociendo sólo el valor nominal o capital futuro. Consulta, si lo deseas, cómo se deduce matemáticamente en el anexo 9.

La diferencia entre el importe del descuento comercial y el racional puede ser significativa en cálculos con importes elevados. Recuerda, de todas formas, que en la práctica comercial y bancaria se utiliza casi siempre el descuento comercial.

Un producto financiero en el que se aplica el descuento racional son las Letras del Tesoro.

2.4.3. Las Letras del Tesoro

Las *Letras del Tesoro* son activos emitidos al descuento ya que el comprador cobra, al final del periodo de emisión, el valor nominal y paga, al inicio del periodo, el valor efectivo o descontado.

Las emitidas a plazos iguales o inferiores a los 12 meses se calculan aplicando las fórmulas del descuento racional que acabamos de estudiar. En cambio, las que se emiten a 18 meses se calculan aplicando las fórmulas del interés compuesto (que veremos más adelante).

Ahora nos referiremos únicamente a las Letras del Tesoro a 12 meses, que, por lo tanto, utilizan las fórmulas del descuento racional simple.

Las Letras del Tesoro tienen un valor nominal de 1 000,00 EUR. Las emitidas a 12 meses (o 52 semanas) tienen una vida exacta de 364 días: las subastadas, por ejemplo, el 19 de abril vencen el 18 de abril del año siguiente. En la subasta se fija el precio medio: es lo que debe pagar el comprador por cada 100,00 EUR. Así, un precio medio de 96,90 EUR indica que, para adquirir 100,00 EUR, hay que pagar 96,90 EUR. (Se trata, por consiguiente, de un porcentaje o tanto por ciento.)

El tipo de interés nominal se obtiene aplicando la siguiente fórmula:

$$i = \frac{D}{V_e \cdot n} \qquad \textbf{[22]}$$

La fórmula equivalente, con el tiempo expresado en días (t), será:

$$i = \frac{D}{V_e \cdot \frac{t}{360}}$$

Se obtiene así el tipo de interés que sale publicado en la subasta.

Si el comprador basa sus cálculos en el año natural (365 días), al aplicar la fórmula anterior obtendrá un tipo de interés ligeramente superior.

Otra operación común, en Letras del Tesoro, es calcular el descuento y, en consecuencia, el valor efectivo, cuando se conoce el tipo de interés.

Se debe utilizar la fórmula del descuento racional:

$$D = \frac{V_n \cdot i \cdot n}{1 + i \cdot n} \qquad \textbf{[21]}$$

Si el tiempo se expresa en días (t), la fórmula será:

$$D = \frac{V_n \cdot i \cdot \frac{t}{360}}{1 + i \cdot \frac{t}{360}}$$

Para calcular directamente el valor efectivo, se puede utilizar la siguiente fórmula, deducida de las anteriores:

$$V_e = \frac{V_n}{1 + i \cdot n} \qquad \textbf{[24]}$$

Fíjate que es una fórmula derivada del cálculo del capital final a interés compuesto [$C_n = C_o\,(1 + i \cdot n)$] siendo C_n el valor nominal (V_n) y C_o el valor efectivo (V_e).

2.5. Actualización a interés compuesto

La actualización a interés compuesto tiene aplicación, por ejemplo, en los siguientes casos:

- Calcular qué capital debe invertirse en una operación financiera de capitalización para obtener en el futuro un capital determinado.
- Conocer el valor actual de una deuda que vence dentro de un tiempo.
- Hallar el valor de emisión en una operación cupón cero o de una Letra del Tesoro cuya duración sea superior a un año. (Se trata de un tipo de emisión de títulos en la que el titular no recibe intereses durante la vida del valor, sino que lo hace íntegramente en el momento en el que se amortiza el título.)

En la capitalización a interés compuesto los intereses se añaden periódicamente al capital, con lo que éste es cada vez mayor. Por el contrario, en la actualización a interés compuesto:

- El descuento, en cada periodo de devengo, se va deduciendo del capital.
- El capital es más pequeño en cada periodo de actualización.
- El descuento se calcula sobre el valor del capital actualizado al inicio de cada periodo.
- El importe del descuento es más pequeño en cada período.

2.5.1. Fórmulas generales

A partir de la fórmula $C_n = C_0\,(1 + i)^n$, que indica el valor del capital final o futuro, se puede obtener la fórmula del capital inicial o actual. Basta con despejar C_0:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1 + i)^n} \qquad \textbf{[32]} \ \ \textbf{[27]}$$

La fórmula de la actualización:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

Podría escribirse también:

$$C_0 = C_n \cdot \frac{1}{(1+i)^n}$$

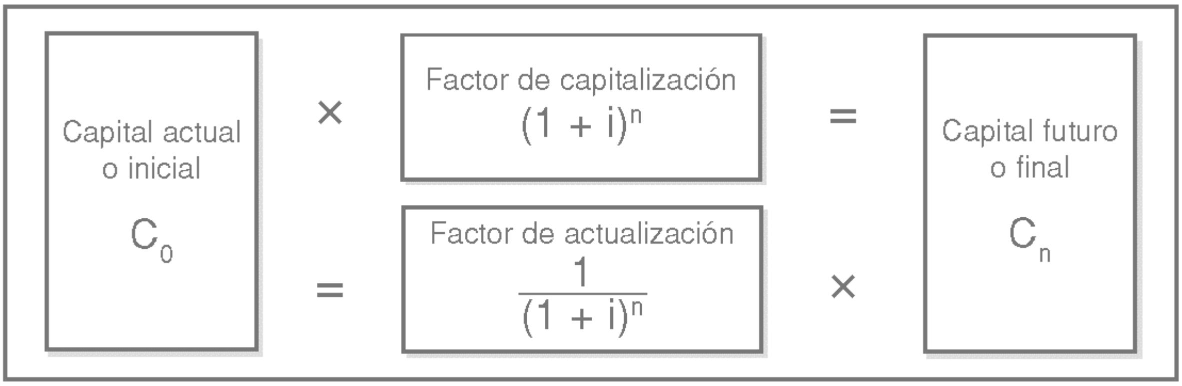
La expresión $\frac{1}{(1+i)^n}$ indica el valor del capital inicial cuando el capital final es 1,00 EUR.

Se le llama *factor de actualización* (fórmula 33 del apéndice).

Para obtener el valor de un capital actual cualquiera, bastará con multiplicar el capital final por el factor de actualización.

Matemáticamente, la expresión $\frac{1}{(1+i)^n}$ también puede expresarse como $(1 + i)^{-n}$, pero para mayor claridad utilizaremos siempre fórmulas con exponentes positivos.

Recuerda el significado del factor de capitalización y del factor de actualización:



De la relación entre el factor de actualización, el tipo de interés y el tiempo se deduce que:

- Cuanto más tiempo se anticipe o actualice un capital, menor será el valor actual obtenido.

- Cuanto menor sea el tipo de interés al que se actualice un capital, mayor será el valor actual obtenido.

En el ejemplo anterior estamos ante una operación de actualización porque, dado un capital futuro, hay que calcular su valor actual.

2.5.2. Actualización periódica de los intereses

Hasta ahora hemos supuesto que, en la actualización de capitales, la aplicación del descuento se hace una vez al año. Es decir, estamos haciendo la simplificación de que el periodo de actualización es igual al periodo al que se refiere el tipo de interés, que casi siempre es anual.

Pero, al igual que la capitalización, la actualización puede hacerse más de una vez al año: semestralmente, trimestralmente, mensualmente... En estos casos la frecuencia de actualización es superior a 1.

En la actualización compuesta se produce la misma situación, aunque con un resultado diferente, al de la capitalización compuesta:

- En la capitalización, como sabes, al aumentar la frecuencia aumentan también los intereses y, por tanto, el capital final.

- En la actualización, al aumentar la frecuencia del cálculo de intereses, aumentan éstos y, como consecuencia, disminuye más el capital actual.

El anexo 10 muestra, a través de un ejemplo, la variación del capital actual en función de la frecuencia de actualización.

Cuando la frecuencia de actualización es superior a 1, no puede aplicarse la fórmula que hemos utilizado hasta ahora para calcular el capital actual. Hay que introducir en ella las mismas correcciones que en la capitalización:

- No puede utilizarse el tipo de interés nominal (i) que se refiere al año, sino sólo la parte que corresponde a cada periodo liquidado, es decir, el tipo de interés efectivo. Así, si la frecuencia es cuatro ($k = 4$), porque se aplican los descuentos trimestralmente, en lugar de i se utilizará el interés efectivo trimestral $i/4$ (en general, i/k).

- Hay que multiplicar el número de años (n) por la frecuencia de actualización anual (k). De este modo se tiene en cuenta el número total de periodos en que se aplican los descuentos ($n \cdot k$).

La fórmula general de la actualización, cuando la frecuencia es superior a 1, será:

$$C_0 = \frac{C_n}{\left(1+\frac{i}{k}\right)^{n\cdot k}} \qquad \textbf{[35]}$$

3. TIPOS DE INTERÉS

Tradicionalmente se ha venido utilizando el tipo de interés nominal o teórico (*i*, en la fórmula general) como valor de referencia del coste o rendimiento de una determinada operación financiera.

Este tipo de interés nominal o teórico se expresa normalmente en tanto por ciento anual y se refiere a los intereses devengados por un capital dado, durante el plazo de un año. Pero es sólo un valor teórico, que no indica el rendimiento o coste real de una operación; para ello es preciso calcular el tipo de interés (o tasa) efectivo.

Al tratar del interés simple ya hemos explicado que la *tasa nominal* (o *tipo de interés nominal*) hacía referencia a los intereses devengados por un capital durante un año. Cuando el periodo es inferior nos referíamos al tipo de interés efectivo (mensual, trimestral...). En *interés compuesto* la diferencia entre la tasa nominal y la efectiva se produce por la frecuencia anual de devengo de los intereses.

3.1. Introducción

El precio de un instrumento financiero vendrá dado por el valor actual de sus flujos de caja. Como los flujos se reducen en momentos distintos del tiempo habrá que tener en cuenta el valor temporal del dinero para homogeneizarlos convenientemente. En definitiva, es necesario disponer de alguna técnica que, dada la estructura temporal de tipos de interés (ETTI) de la economía en el momento de la valoración, permita descontar con arreglo a dicha estructura cada uno de tales flujos para obtener su valor actual.

Lo que nos proporciona la ETTI es información acerca de la relación entre los tipos y el plazo; es decir, muestra el valor que el mercado asigna a una unidad monetaria en cualquier instante futuro. Existirá una única ETTI para cada moneda, momento de tiempo y riesgo crediticio (considerando homogéneas las condiciones de liquidez y fiscalidad).

Los factores de descuento aplicables a cada una de las fechas en las que se producen los flujos se calculan a partir de los tipos de interés de mercado vigentes en el momento de su determinación. A partir de dicha función de descuento se realizan una serie de cálculos derivados que permiten obtener algunos tipos de interés muy relevantes para los mercados (los tipos cupón cero y los tipos implícitos). En realidad, la función de descuento, los tipos cupón cero y los tipos implícitos son tres formas de presentar exactamente lo mismo, o, en otras palabras, tres manifestaciones de una misma cosa: **la estructura temporal de los tipos de interés**.

3.2. Función de descuento

En condiciones normales una economía definirá tipos de interés diferentes de cero y positivos, por lo que una unidad monetaria que será recibida con certeza en el futuro valdrá menos que una unidad monetaria disponible hoy. Este valor dependerá del nivel de tipos de interés vigente para el plazo en el que se recibirá esa unidad monetaria.

Una economía no define un tipo de interés único para cada plazo. Serán varios los tipos de interés disponibles dependiendo del instrumento negociado en el mercado que se tome como referencia. Una característica básica se referirá a la calidad crediticia del emisor del instrumento; así, un prestatario con riesgo tesoro, también conocido como riesgo soberano, definirá en general un tipo de interés menor a un prestatario con riesgo bancario, de ese modo cada emisor tiene su función de descuento asociada.

Por ello se puede definir como **Factor de Descuento para tiempo t, P(t), al precio que se paga hoy por una unidad monetaria que va a ser percibida en tiempo t.**

La función P(t) es decreciente y toma valores en (0,1].

Existen principalmente dos tipos de técnicas para la determinación de las funciones:

- *Paramétricas*. En la cual partiendo de una forma funcional paramétrica, se optimizan estos parámetros hasta encontrar la forma funcional que mejor represente los datos de mercado. Entre estas técnicas cabe resaltar las de **Nelson-Siegel y la de Svensson.**

- *Bootstrapping.* Técnica recursiva mediante la cual se van calculando directamente los factores de descuento de cada vértice de mercado desde el de menor plazo al del mayor. La función resultante es discreta, para determinar la función fuera de los vértices se interpola exponencialmente.

  Estas técnicas usan como dato de partida información de mercado, por ejemplo, para el cálculo de la ETTI del tesoro español los datos de mercado (también llamados vértices) son letras del tesoro, obligaciones y deuda del estado. En el caso de la ETTI con riesgo interbancario los vértices a usar son los depósitos y los tipos SWAPS (IRS) y para conocer la curva de descuenta de Telefónica se usan los bonos de la compañía.

  Como ejemplo, si conocemos la Función de Descuento del Tesoro Español y nos piden precio de un Bono cupón cero del Tesoro Español de nominal 1Mn € con vencimiento dos años podremos determinar su valor directamente.

Curva de Descuento Tesoro, P(·)

Fecha	Descuento
10/05/2008	1
10/11/2008	0,980
10/05/2009	0,958
10/11/2009	0,937
10/05/2010	0,915
10/11/2010	0,892
10/05/2011	0,866
10/11/2011	0,843
10/05/2012	0,817
10/11/2012	0,790

Por tanto, el valor del bono con vencimiento 10 de mayo de 2010 es:
VALOR= 0,915 X 1.000.000 € = 915.000 €

Analicemos la siguiente situación: un cliente pide precio a Cajasol por el mismo Bono del Tesoro Español, pero quiere comprarlo a plazo para dentro de seis meses, es decir el cliente quiere pagar hoy una cantidad y recibir el Bono dentro de seis meses, el 10 de noviembre de 2008.

Como en ambos casos los flujos de la operación son los mismos, ¿Deberían ser idénticos ambos precios?.

Para resolver este problema debemos de introducir un concepto nuevo, es la Función de Descuento *Forward*, se define como **Factor de Descuento Forward o implícito, P(s,t), al precio que se pagaría en tiempo s por una unidad monetaria que va a ser percibida en de tiempo t.**

P(s,t) queda determinada implícitamente a partir de P(t), de la siguiente manera:

$$\mathbf{P(s,t) = P(t)/P(s)}$$

De esta manera el valor del Bono que quiere comprar en s = 0.5 años es:

$$\mathbf{P(0.5,2) = P(2)/P(0.5)}$$

Pero este sería el valor del bono a fecha 10/11/2008 y el cliente quiere liquidar la operación a fecha de hoy 10/05/2008, por lo cual tenemos que actualizar a hoy en valor del Bono a fecha 10/11/2008.

La clave esta en saber que Función de Descuento debemos aplicar, como la contraparte del cliente es Cajasol deberá ser la función de descuento de Cajasol, Q(t), la que se aplique:

Curva de Descuento Cajasol, Q(·)

Fecha	Descuento
10/05/2008	1
10/11/2008	0,977
10/05/2009	0,951
10/11/2009	0,927
10/05/2010	0,902
10/11/2010	0,876
10/05/2011	0,847
10/11/2011	0,821
10/05/2012	0,793
10/11/2012	0,763

Así pues el valor de la operación sería

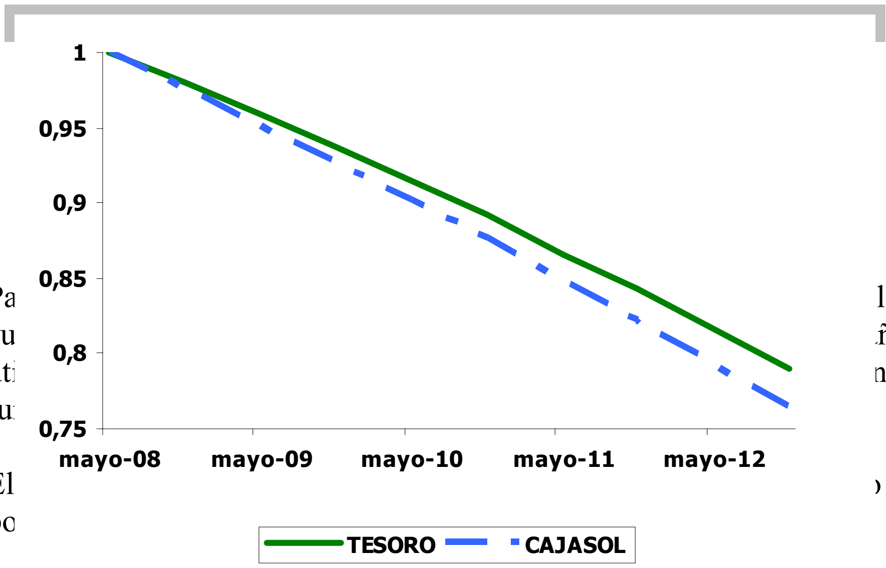
$$P(0.5,2)*Q(0.5) = P(2)/P(0.5)*Q(0.5) = P(2)*[Q(0.5)/P(0.5)]$$

Calculemos el valor de la operación que solicita el cliente numéricamente

Directamente de la ETTI del Tesoro podemos saber:
P(2) = 0.915
P(0.5) = 0.980
Así el descuento forward,
P(0.5,2) = 0.915/0.980 = 0.934
A partir de la curva de descuento de Cajasol
Q(0,5) = 0.977
Por tanto el valor de la operación es:
VALOR = 0.934 x 0.977 x 1.000.000 € = 911.786 €

Puesto que Cajasol tiene más riesgo que el Tesoro español su función de descuento será menor que a del Tesoro, de esta manera Q(t)/P(t) < 1 para cualquier plazo t. Por ello la segunda opción de inversión debe ser más barata que la primera.

Se presenta gráficamente la comparación entre las dos curvas de descuento usadas.



3.3.

Pa… l valor de un bono cu… ños, P(2) se ut… n relación con la fu…

El… t lo denotamos po…

$$P(0,t)=\frac{1}{\left(1+Rs(0,t)\cdot t\right)}$$

$$Rs(0,t)=\frac{1}{t}\cdot\left(\frac{1}{P(0,t)}-1\right)$$

Por ejemplo, calculemos el tipo simple cupón cero de Cajasol para la fecha 10/11/2008 y para 10/05/2010.

Q(0.5) = 0,977
t = 0.5 años
Rs(0,0.5) = (1/0,977 – 1) / 0.5 = 0.0481 = 4.81%

Q(2) = 0,902
t = 2 años
Rs(0,2) = (1/0,902 – 1) / 2 = 0.0546= 5.46%

NOTA 1: LA siguiente expresión Rs(0,0.5) se lee de esta manera, el tipo simple desde tiempo 0 a tiempo 0.5

Si en cambio se usa el tipo cupón cero de interés continuo que tenemos hoy con plazo t y que denotamos como Rc(0,t), su relación con el descuento sería:

$$P(0,t) = e^{-Rc(0,t)\cdot t}$$

$$Rc(0,t) = \frac{1}{t}\cdot \ln\left(\frac{1}{P(0,t)}\right)$$

Donde exp(·) es la función exponencial y ln(·) es la función logaritmo neperiano.

Calculemos el tipo continuo cupón cero de Cajasol para la fecha 10/11/2008.
Q(0.5) = 0,977
t = 0.5 años
Rc(0,0.5) = ln(1/0,977) / 0.5 = 0.0475 = 4.75%

NOTA 2: Recordemos que la función de capitalización para el tipo continuo es:
Cf(t) = Ci(0)*exp(R*t)

Al igual que se habla de función de descuento forward o implícita, podemos definir el tipo cupón cero forward o implícito, Rs(s,t) o Rc(s,t), como sigue:

Caso interés Simple: Rs(s,t) = (P(0,s)/P(0,t) − 1)/(t-s)

Caso interés Continuo: Rc(s,t) = ln(P(0,s)/P(0,t))/ t

Calculemos los tipos implícitos a un año a fecha 10/11/2008, tanto simple como continuo, sean:

Q(0,0.5) = 0.977
Q(0,1.5) = 0.927

Podemos conocer el descuento implícito

Q(0.5,1.5) = 0.927/0.977 = 0.949

y el tipo implícito

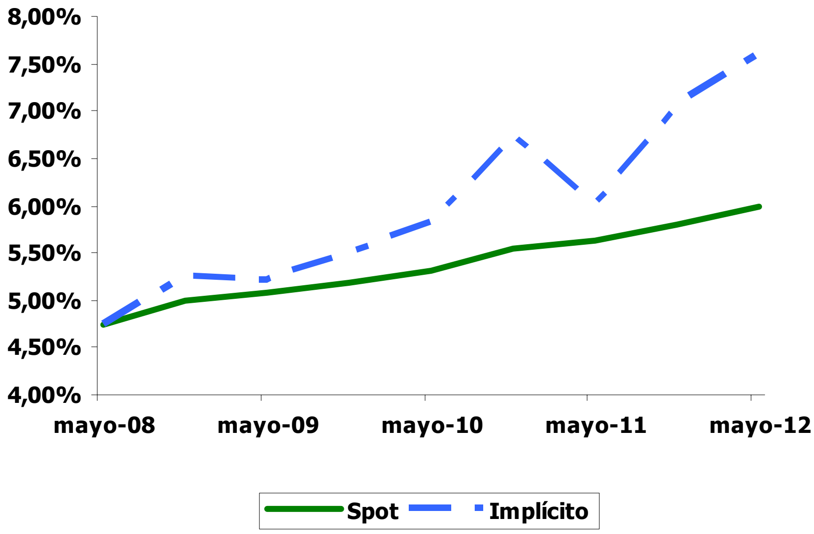
Rs(0.5,1.5) = (0.977/0.927 -1)/1 = (1/0.949 -1)/1 = 5,37%

Rc(0.5,1.5) = (0.977/0.927 -1)/1 = (1/0.949 -1)/1 = 5,23%

NOTA 3: Como podemos ver los tipos simples no tienen porque coincidir con los continuos, pero representan exactamente lo mismo.

NOTA 4: Con este ejemplo también podemos observar como coincide el cálculo usando la fórmula del tipo forward con la curva de descuento spot (actual) y usando la fórmula del tipo spot con la curva de descuento forward.

NOTA 5: Veamos gráficamente cual es la relación entre los tipos Spot y los Implícitos, en el siguiente grafico se presentan los tipos spot contra los tipos implícitos a 6 meses.
Usando terminología física, se puede decir que los implícitos son a los Spot, como la aceleración a la velocidad, nos cuantifican con que fuerza se relajan (bajan) o se tensionan (suben) los tipos spot.



También se puede definir en función de los tipos Spots, basándonos en el principio de ausencia de oportunidad de arbitraje (AOA).

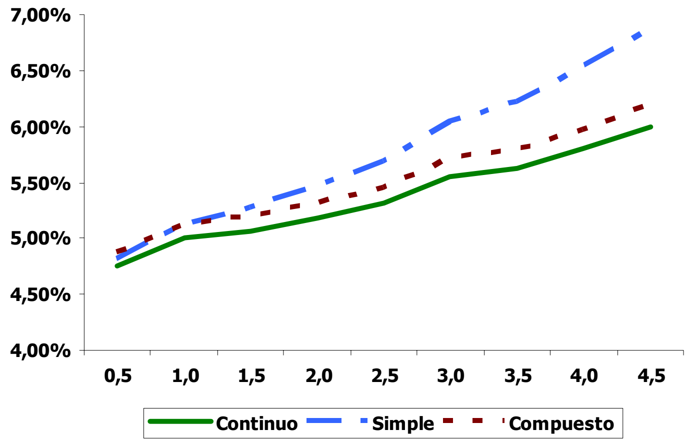
NOTA 6: El principio de ausencia de oportunidad de arbitraje supone que los mercados son eficientes y se autorregulan.
Como ejemplo pensemos en dos vendedores de acciones que ofertan distintos precios, si el mercado es eficiente los toda la oferta se dirigirá al vendedor barato, de manera que este subira su precio y el vendedor caro tendra que bajar el suyo para que le compren (oferta y demanda), de esta manera se llegara al equilibrio de precios entre los vendedores.

Supongamos los tiempos s<t, los tipos spot a los respectivos plazos R(0,s) y R(0,t) y el correspondiente tipo forward R(s,t), "hoy" por AOA invertir un euro a plazo t con rentabilidad R(0,t) es equivalente a invertir un euro hasta tiempo s con rentabilidad R(0,s) y reinvetir el producto hasta tiempo t con rentabilidad R(s,t).

De esta manera redefiniríamos el tipo forward o implícito de la siguiente manera:

Caso interés Simple: Rs(s,t) = ((1+t*Rs(0,t))/ (1+s*Rs(0,s)) − 1)/(t-s)
Caso interés Continuo: Rc(s,t) = (Rc(0,t)*t- Rc(0,s)*s)/(t-s)

NOTA 7: También se puede considerar el caso del interés compuesto partiendo de su fórmula de capitalización, se muestra en el siguiente gráfico la comparativa de los tipos continuo, simple y compuesto que representan la misma Estructura Temporal de Tipos de Interés.



3.4. Concepto

Un FRA es una ... tipo de interés fijo en una oper... período previamente det...

Las partes fijan ... ado en un momento futuro ... e de los intereses de un activo o deuda por un período previamente especificado.

El comprador de un FRA es el que intenta protegerse de subidas de tipos de interés cuando está endeudado a tipo variable. En cambio, al acreedor de una deuda a tipo variable le interesa vender un FRA para protegerse de subidas de los tipos de interés.

Los FRA's tienen su propio lenguaje de denominación; por ejemplo si las partes desean acordar un tipo de interés para una operación a un plaza de seis meses que tendrá lugar dentro de 3 meses, se dice que es un FRA 3/9; si se trata de una operación por un plazo de un año a constituir dentro de 6 meses, se hablará de un FRA 6/18 y así sucesivamente.

Llegado el momento de liquidar el FRA de que se trate, si el tipo de referencia establecido es superior al tipo FRA acordado, el comprador del FRA recibirá del vendedor del mismo la diferencia de ambos tipos aplicados al nocional establecido. Por el contrario si el tipo FRA es inferior al tipo de referencia establecido, el comprador pagará al vendedor la diferencia de ambos tipos de interés aplicado al importe nominal establecido.

Es decir, la liquidación de los FRAS se efectúa por diferencias, sin que la operación presuponga intercambio del nominal entre las partes.

3.5. *Interest Rate Swap* (IRS)

Un IRS es una modalidad de instrumento financiero por la cual las partes se intercambian periódicamente intereses sobre nocionales determinados, sin intercambio de nominal.

Un IRS fijo-variable es un instrumento por el que una de las partes paga periódicamente un interés variables sobre un nominal nocional determinado, mientras que la otra parte paga un interés fijo o strike sobre ese nominal nocional. En un swap sólo hay pagos de intereses y no se intercambian nominales.

Llamamos Tipo Swap al tipo fijo que hace que el valor de la rama fija coincida con la rama variable.

Sin tener en cuenta el riesgo de crédito de las contrapartidas, supongamos un IRS cuya rama variable paga con periodicidad t, el tipo de referencia de mercado a inicio de cada periodo Rs((n-1)*t,n*t) para todo n=1 . . . m.

El Tipo Swap se determina como:

$$TS = \frac{1 - P(m)}{t \cdot \sum_{i=1}^{m} P(i \cdot t)}$$

Se puede definir el Tipo Forward Swap para un IRS fijo-variable que comienza en tiempo s y vence en tiempo m, con pagos de periodo t, como al tipo fijo que hace que el valor de la rama fija coincida con la rama variable:

$$TS = \frac{P(0,s) - P(0,m)}{t \cdot \sum_{i=1}^{m} P(0,i \cdot t)}$$

3.6. Bases de cálculo

En la expresión matemática del cálculo de los intereses, los tipos de interés se expresan normalmente como tasas anuales. Pero es preciso definir el concepto año para efectuar dicho cálculo (año financiero).

La duración de un año financiero puede ser distinta a la de un año natural, y según el criterio empleado.

Existen varios convenios denominados bases de cálculo. A saber:

- Base Actual / 365
- Base Actual / 360
- Base 30 / 360
- Base 365 / 365
- Base Actual / Actual

La base de cálculo queda definida por dos términos :el numerador indica el criterio que se emplea para calcular diferencia de días entre dos fechas, y el denominador define el número de días que componen el año financiero.

- BASE ACTUAL / 365

  Esta base de cálculo establece que los años financieros tienen 365 días naturales. Por lo tanto en el numerador aparecerá la diferencia de días naturales entre dos fechas dadas y en el denominador 365.

- BASE ACTUAL / 360

  En esta base de cálculo los años financieros son de 360 días naturales. Así pues, en el numerador aparecerá la diferencia de días naturales entre dos fechas dadas y en el denominador 360.

- BASE 30 / 360

  Esta base de cálculo establece que los años financieros están constituidos por 12 meses de 30 días cada uno, independientemente de los días reales que tenga cada mes.

  De tal forma, entre dos fechas dadas F1 y F2, en el numerador aparecerá la suma de los días que restan desde la primera fecha F1 hasta 30 más tantas veces 30 como meses completos hayan más los días de la segunda fecha F2.

- BASE 365 / 365

  Esta base considera que los años financieros son siempre de 365 días aún cuando el año sea bisiesto.

  En los casos en que el cálculo de días entre dos fechas comprenda el día 29 de febrero, este se considera no existente.

- BASE ACTUAL/ ACTUAL

  Para esta base de cálculo en el numerador figurará el numero real de días naturales entre dos fechas dadas y en el denominador 365 si el año es normal y 366 si el año es bisiesto

3.7. Tasa nominal y efectiva en interés compuesto

Cuando se devengan intereses más de una vez al año (mensualmente, trimestralmente o semestralmente), es decir, cuando la frecuencia de devengo es superior a 1, el tipo de interés efectivo anual resultante es superior al tipo de interés nominal.

Supón que se ingresan 6 000,00 EUR en una cuenta especial remunerada al 4 % de interés nominal.

- Si el cobro de intereses es anual, al final del primer año se obtendrán 240,00 EUR de intereses.

- Si el cobro de intereses es semestral, al final del primer semestre se obtendrán 120,00 EUR de intereses. En el segundo semestre se parte de un capital de 6 120,00 EUR y, por eso, los intereses de ese período son superiores a los del primero.

Observa los datos del ejemplo en un cuadro resumen:

	Capital inicial	Tipo de interés nominal	Intereses		
			A los 6 meses	A los 12 meses	Totales
Cobro anual de intereses	6 000,00	4 %	–	240,00	240,00
Cobro semestral de intereses	6 000,00	4 %	120,00	122,40	242,40

En ambos casos el tipo de interés nominal es el 4 %, pero los intereses totales son distintos y, en consecuencia, el tipo de interés real o efectivo anual también lo es.

El tipo de interés efectivo anual se obtiene dividiendo los intereses devengados durante un año a interés compuesto por el capital inicial invertido.

Normalmente el tipo de interés efectivo se expresa en tanto por ciento anual; por consiguiente, para su cálculo se consideran los intereses producidos en un año a interés compuesto y el capital inicial que se tenía al inicio de ese año. En el ejemplo anterior, a pesar de colocar el mismo capital inicial (6 000,00) al mismo tipo de interés nominal (4 %), los intereses producidos varían debido a la frecuencia de capitalización.

Cuando la frecuencia de capitalización es anual, el tipo de interés efectivo anual es 4 % (coincide con el tipo de interés nominal.

Cuando la frecuencia de capitalización es semestral, el tipo de interés efectivo anual es 4,04 % (obtenido al dividir 242,40 entre 6 000,00).

Cuando se devengan intereses más de una vez al año, el tipo de interés efectivo anual es superior al nominal.

El tipo de interés efectivo anual depende, en conclusión, de:

- El tipo de interés nominal de la operación.
- La frecuencia de capitalización (valor de *k*).

En el anexo 11 encontrarás cómo se deduce la fórmula que permite calcular el tipo de interés efectivo anual.

$$\text{Tipo de interés efectivo anual} = \left(1+\frac{i}{k}\right)^{k} - 1 \qquad \textbf{[37]}$$

Para un mismo tipo de interés nominal, cuanto mayor es la frecuencia, más elevado es el tipo de interés efectivo anual.

Observa, en la siguiente tabla, los tipos de interés efectivo calculados para un tipo nominal del 7 % con diferentes frecuencias.

Periodicidad	Frecuencia	Tipo de interés efectivo anual
Anual	1	7, 00%
Semestral	2	7,12 %
Trimestral	4	7,19 %
Mensual	12	7,23 %

En interés simple, donde no existe efecto de acumulación de intereses, un 6 % anual es equivalente a un 3 % semestral, a un 1,5 % trimestral o a un 0,5 % mensual.

En los cálculos a interés compuesto no ocurre lo mismo; un tipo de interés efectivo anual del 6 % no es equivalente a un tipo de interés efectivo semestral del 3 %, sino a un tanto por ciento ligeramente inferior. (Piensa que un interés efectivo semestral del 3%, equivaldrá a un interés efectivo anual algo superior al 6 % por el efecto de calcular, en cada periodo, los intereses sobre los intereses acumulados al capital.)

En las operaciones de actualización a interés compuesto, teniendo en cuenta que pueden producirse distintas frecuencias de actualización, también es necesario calcular el coste –o beneficio- financiero real mediante la obtención del tipo de interés efectivo anual. La fórmula a utilizar será la misma que hemos visto para la capitalización:

4. RENTABILIDAD

La rentabilidad es uno de los factores que más se tienen en cuenta al invertir en activos financieros (acciones, bonos...).

La rentabilidad indica la variación, expresada normalmente en tanto por ciento, que experimenta el valor de un activo durante un cierto periodo de tiempo.

Esta variación, que se expresa en porcentaje o tasa, puede ser positiva, nula o negativa.

Supongamos un ejemplo sencillo. Una persona compra un cuadro por
7 000,00 EUR con la finalidad de realizar una inversión. Al cabo de tres años lo vende por 8 000,00 EUR. La rentabilidad de la operación, suponiendo que el inversor no tiene ningún gasto y prescindiendo de la posible carga fiscal, es del 14,29 %. Se deduce por el siguiente cálculo:

$$\left(\frac{8\,000{,}00 - 7\,000{,}00}{7\,000{,}00} \cdot 100\right)$$

La rentabilidad calculada así indica que, por cada 100,00 EUR invertidos, se obtienen 14,29 EUR al cabo de tres años.

En este caso se trataba de un activo en el que no han existido variaciones intermedias: no ha generado rendimientos periódicos ni ha comportado gastos de administración y/o mantenimiento. Generalmente no ocurre esto, ya que un activo puede producir beneficios (dividendos, intereses, alquileres…) y/o generar gastos (contratación, liquidación, mantenimiento, fedatario público, Hacienda…).

Por eso, el cálculo de la rentabilidad suele ser más complejo teniendo en cuenta que hay distintas formas de hallar su valor, según el rigor o grado de exactitud que quiera aplicarse. A continuación veremos estas cinco formas:

- Rentabilidad simple.
- Rentabilidad geométrica.
- Tasa Interna de Rentabilidad (TIR).
- Tasa Anual Equivalente (TAE).
- Tasa de Rentabilidad Efectiva (TRE).
- Rentabilidad real.

4.1. Rentabilidad simple

La *rentabilidad simple (RS)*, es la forma de expresar la variación del valor de un activo, durante un periodo de tiempo determinado, suponiendo que los beneficios que genera se producen al final del periodo.

Su fórmula es:

$$RS = \frac{\text{Cobros} - \text{Pagos}}{\text{Inversión inicial}} \cdot 100$$

Entre los cobros debe tenerse en cuenta el valor final del activo (*VF*) y entre los pagos la inversión realizada (*VI*). Por eso, la fórmula general que permite calcular la rentabilidad simple es:

$$RS = \frac{(V_F + D) - (V_I + G)}{V_I} \cdot 100 \quad \textbf{[38]}$$

siendo:

V_F = Valor al final del periodo considerado.
V_I = Valor inicial o de compra.
D = Dividendos u otros rendimientos.
G = Gastos.

Este cálculo de la rentabilidad tiene poca aplicación ya que no tiene en cuenta el momento en que se producen los cobros y pagos. No es, por lo tanto, un método de cálculo financiero.

4.2. Tasa de rentabilidad geométrica

Si el horizonte temporal de una inversión se divide en períodos, la tasa geométrica de rentabilidad es el tanto efectivo anual que hace equivalentes los valores inicial y final de la inversión, teniendo en cuenta que las rentabilidades intermedias que se producen en cada período se reinvierten en el mismo activo; es decir, se está dando una capitalización a interés compuesto.

Supongamos, por ejemplo, que una acción se mantiene durante tres años y tiene las siguientes rentabilidades anuales:

Año 1	Año 2	Año 3
20 %	25 %	–23,33

El promedio aritmético de las tres rentabilidades es 7,22 %, pero la rentabilidad del activo vendrá dada por la tasa geométrica de rentabilidad, cuya fórmula general es:

$$\sqrt[n]{(1+RS_1)\cdot(1+RS_2)\cdot\Lambda\cdot(1+RS_n)}-1 \qquad \textbf{[41[}$$

En nuestro caso:

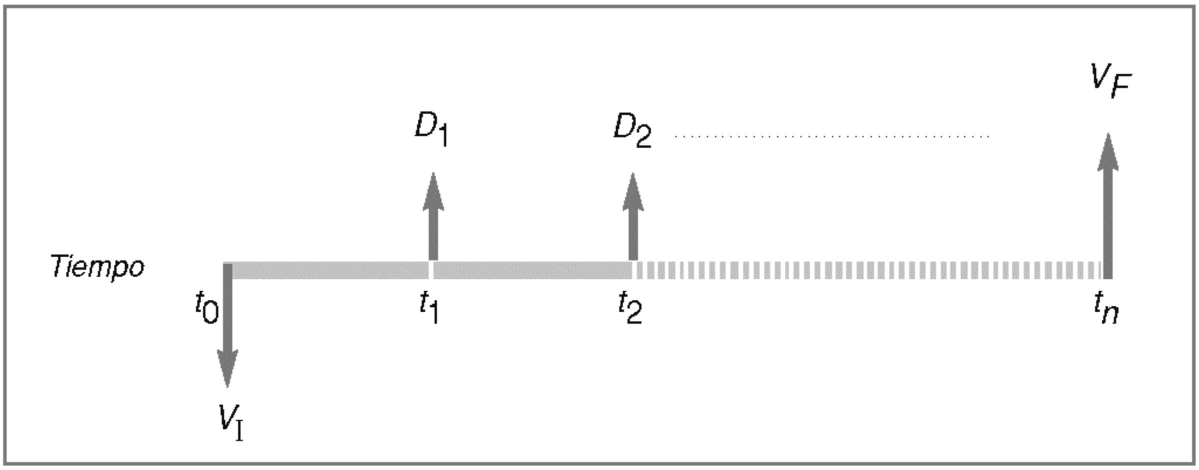
$$\sqrt[3]{(1+0{,}20)\cdot(1+0{,}25)\cdot(1-0{,}2333)}-1=4{,}77\%$$

Este tipo de cálculo se puede aplicar siempre que los períodos de tiempo considerados sean iguales, o que los intereses estén anualizados.

4.3. Tasa Interna de Rentabilidad (TIR)

Una de las situaciones más habituales en cálculo financiero es el de un activo que genera varios cobros o pagos a lo largo de su período de vigencia. Es el caso, por ejemplo, de un préstamo que se amortiza mediante el desembolso de varios pagos periódicos o de un capital que se constituye a partir de varias cuotas satisfechas en diferentes momentos.

En el esquema siguiente representamos la evolución de un activo. Sería el caso concreto de un activo que genera rendimientos periódicos.



t_0, t_1, t_2… …t_n: son las distintas fechas en las que se producen variaciones en el activo.
V_I : es el valor inicial del activo.
V_F: es el valor final del activo, recuperado en la fecha t_n.
D_1, D_2,……: son rendimientos generados por el activo en cada una de las fechas t_1, t_2...

Para medir la rentabilidad de una inversión se utiliza el VAN (Valor Actual Neto): es el rendimiento actualizado de los flujos positivos y negativos de capital.

Suponiendo que se realiza un desembolso inicial (V_I) y que existan varios flujos de caja posteriores (D), la igualdad que proporciona el VAN es:

$$\pm \text{VAN} = - V_I \pm \frac{D_1}{(1+i)} \pm \frac{D_2}{(1+i)^2} \pm \qquad \pm \frac{V_F}{(1+i)^n}$$

siendo:

VAN: valor actual neto, que puede ser positivo o negativo.
V_I: desembolso inicial.
D: cada uno de los flujos netos de caja, pudiendo ser cobros (+) o pagos (–) efectivos al cabo de 1, 2...n años del inicio de la operación (suponiendo que los flujos sean anuales).
i : tipo de interés nominal.

Si el VAN resulta positivo, significa que el valor actualizado de entradas y salidas de capital de una inversión proporciona un beneficio al inversor. Si, por el contrario, resulta negativo, significa que se produce una pérdida.

La *Tasa Interna de Rentabilidad* o *TIR*, es el tipo de interés que iguala el valor actual de los flujos de caja positivos (cobros) con el de los flujos negativos (pagos).

Es decir, la TIR es el tipo de interés nominal cuando el VAN = 0.

Por lo tanto, la ecuación que permite calcular la TIR de una inversión en la que se hace un desembolso inicial (V_I) y se perciben varios cobros como beneficio (D_1, D_2, D_3...) será:

$$V_I = \frac{D_1}{(1+i)^{n1}} + \frac{D_2}{(1+i)^{n2}} + \frac{D_3}{(1+i)^{n3}} + \ldots \quad \textbf{[39]}$$

n_1, n_2, n_3,…es el tiempo transcurrido (expresado en años) entre el momento actual $t0$ y cada una de las fechas t_1, t_2, t_3…

El tipo de interés nominal (i) que da lugar a que se cumpla la igualdad anterior es la TIR.

Ten en cuenta que esta igualdad sólo es cierta si se supone que los cupones que percibe el inversor los reinvierte a la misma TIR del bono, algo bastante improbable.

Por eso, aunque la utilización de la TIR para medir la rentabilidad de un activo es bastante aceptada, tiene el inconveniente que acabamos de mencionar.

4.4. Tasa Anual Equivalente (TAE)

En banca, y en las entidades financieras en general, en lugar de utilizar el tipo de interés efectivo anual para reflejar el coste o la rentabilidad de una operación, se suele utilizar la *Tasa Anual Equivalente* (TAE).

Se utiliza para dotar de transparencia a las operaciones financieras. Su cálculo viene regulado por circulares del Banco de España, que determina cómo se calcula en cada tipo de operación.

La TAE se calcula con los mismos principios que el tipo de interés efectivo anual a interés compuesto, pero refleja, con mucha mayor precisión, el coste o los ingresos económicos reales de una operación financiera, por los motivos siguientes:

- En las operaciones de activo, tiene en cuenta los gastos que las entidades deducen del principal en el momento de abonar un préstamo (comisiones de estudio, de apertura, etcétera) y calcula el coste efectivo sobre el capital neto percibido por el cliente.

- En las operaciones de activo y de pasivo, resta de los intereses abonados (o suma a los intereses pagados) cualquier comisión fija que la entidad perciba en el transcurso de la operación (por ejemplo, una comisión fija de 20,00 EUR anuales para administración de cuenta).

Por lo tanto, en las operaciones de activo, la TAE -al considerar el capital efectivo entregado en los préstamos y los gastos cobrados por las entidades- será superior al tipo de interés efectivo anual. Representa fielmente el coste económico total soportado por el cliente en la operación, como contrapartida al capital neto recibido.

En una operación de pasivo la TAE tiene en consideración los gastos y comisiones que la entidad cobra al cliente. Por eso, la TAE será normalmente menor que el tipo de interés efectivo anual.

Si una operación financiera no comporta comisiones ni gastos, su TAE coincide con el tipo de interés efectivo anual. Si, además, la frecuencia de cobros o pagos es anual, coincide también con el tipo de interés nominal.

4.5. Tasa de Rentabilidad Efectiva (TRE)

Tanto en la TIR como en la TAE se aplica, a todos los cobros o pagos, el mismo tipo de interés. No se tiene en cuenta, por ejemplo, que un capital cobrado se pude reinvertir a otros tipos de interés. Este defecto se subsana utilizando la TRE.

En este tipo de cálculo, más preciso que la TIR y la TAE, se siguen estos pasos:

1. Calcular el valor final de la inversión, teniendo en cuenta el periodo de capitalización de cada uno de los cobros y el tipo de interés aplicado para cada capital.

$V_F = D_1 \cdot (1+i_1)^{n-n_1} + D_2 \cdot (1+ i_2)^{n-n_2} + ... + D_n \cdot (1+ i_n)$

$D_1, D_2... ...D_n$: representa cada uno de los ingresos o devengos originados por la inversión.
V_F : es el principal, recuperado al final de la operación.
$i_1, i_2... ...i_n$: es el tipo de interés al que se reinvierte cada uno de los capitales devengados.
$n - n_1, n - n_2,...$: es el tiempo que media entre el cobro de cada capital y el final de la operación.

2. Hallar el tipo de interés, a interés compuesto, teniendo en cuenta el valor final, el desembolso inicial y el tiempo total de la operación.

Se utiliza la fórmula que ya conoces:

$$i = \sqrt[n]{\frac{V_F}{V_1}} - 1 \qquad \textbf{[40]}$$

El tipo de interés (i) obtenido así es la *Tasa de Rentabilidad Efectiva (TRE)*.

(Recuerda que para calcular la TIR se igualan los cobros y pagos en el momento de la inversión. En este caso, 12 000,00 es el valor de adquisición de las acciones, 800,00 el valor del dividendo y 12 350,00 el de venta. Estos últimos valores se actualizan a la fecha de adquisición.)

Haciendo los cálculos pertinentes en la fórmula anterior se obtiene una TIR de 6,574 %. Esta tasa de rentabilidad está suponiendo que los 800,00 EUR percibidos en concepto de dividendo se han reinvertido al 6,574 %.

Pero vamos a suponer que se reinvierten al 3,80 % anual. Por eso, la Tasa de Rentabilidad Efectiva (TRE) expresará con mayor precisión la rentabilidad que obtiene nuestro inversor.

Como era de esperar, la TRE es inferior a la TIR, porque los dividendos se reinvierten, en este caso, a una tasa inferior a la TIR.

Si suponemos que los dividendos no se reinvierten, obtendremos la rentabilidad mínima de la operación, que calculamos a continuación.

4.6. Rentabilidad real

Hasta ahora hemos hablado de cinco tipos de rentabilidad:

- Rentabilidad simple.
- Tasa de rentabilidad geométrica.
- Tasa Interna de Rentabilidad (TIR).
- Tasa Anual Equivalente (TAE).
- Tasa de Rentabilidad Efectiva (TRE).

En ninguna de ellas hemos tenido en cuenta los gastos o comisiones que puede cobrar la entidad financiera ni las circunstancias personales de cada inversor. Sólo en la TAE se consideran los gastos que determina el Banco de España.

Para obtener la rentabilidad real, hay que tener en cuenta –entre otros- los siguientes datos:

- Los gastos de gestión que cobra la entidad.
- La retención fiscal que se realiza al cobrar intereses o dividendos.
- El tipo de gravamen correspondiente al inversor en el IRPF.

Veamos qué influencia tienen todos ellos en el cálculo de la tasa de rentabilidad.

Supón ahora que la entidad, de acuerdo con la normativa fiscal vigente en ese momento, retiene al señor Pérez un 15 %, sobre los beneficios, a cuenta del IRPF; es decir, 48,75 EUR (el 15 % de 325,00 EUR).

En ese caso, no percibirá 1 285,00 EUR sino 1 236,25 EUR. En consecuencia, el cálculo de la TIR nos daría una rentabilidad inferior al 6,47 % anual que hemos calculado antes. La ecuación de equivalencia sería:

$$1\ 000,00 = \frac{1\ 236,25}{(1 + i)^4}$$

La TIR así obtenida pasa a ser del 5,445 % anual.

Pero es más; cuando el señor Pérez, en el siguiente ejercicio, realice su declaración de renta, deberá indicar los beneficios que le produjo su inversión y tributar por la misma según su tipo marginal impositivo.

El tipo de interés obtenido en el cálculo anterior indicará la TIR después de impuestos, por tener en cuenta el beneficio obtenido por el inversor, pero también el efecto de fiscalidad del producto.

Además de los impuestos, otra variable externa que afecta a la rentabilidad es la inflación. La inflación disminuye el poder adquisitivo del dinero que se ha ahorrado, o sea, devalúa el ahorro. La inflación es, por tanto, uno de los principales enemigos del ahorro y, consecuentemente, de la inversión.

La *rentabilidad real* tiene en cuenta la tasa de inflación de la economía, de modo que de la rentabilidad financiero-fiscal de la inversión deberá descontarse la tasa de inflación soportada. Si esta tasa es elevada, la rentabilidad real puede ser negativa; de hecho, algunos productos ofrecen rentabilidades reales negativas (para el cliente, la utilidad de estos productos muchas veces está en los servicios que llevan asociados).

La siguiente fórmula permite hallar la rentabilidad real generada en un periodo de un año:

$$\text{Rentabilidad real} = \left(\frac{1 + \text{rentabilidad financiero-fiscal}}{1 + \text{tasa de inflación anual}} - 1 \right) \cdot 100$$

(La rentabilidad financiero-fiscal y la tasa de inflación se expresan en tanto por uno.)

Observa en la fórmula anterior, que la rentabilidad y la inflación son antagónicos: la primera añade valor mientras que la segunda lo descuenta.

Veamos estos ejemplos:

1. La rentabilidad financiero-fiscal de una inversión ha sido del 4 % anual, idéntico porcentaje que el de la tasa de inflación de este periodo.

   En este caso, la rentabilidad real es nula:

   $$\left(\frac{1+0{,}04}{1+0{,}04} - 1 \right) \cdot 100 = 0\%$$

   La inflación ha consumido toda la rentabilidad financiero-fiscal generada por la inversión.

2. La rentabilidad financiero-fiscal de una inversión ha sido del 6 % anual y la tasa de inflación de este periodo, del 4,5 %.

   En este caso, la rentabilidad real es positiva:

   $$\left(\frac{1+0{,}06}{1+0{,}045} - 1 \right) \cdot 100 = 1{,}44\%$$

La inflación ha consumido una parte de la rentabilidad financiero-fiscal generada por la inversión (la diferencia entre la rentabilidad financiero-fiscal y la tasa de inflación es del 1,5 %; esta pequeña diferencia con el resultado obtenido se debe a que los valores se actualizan al momento cero, es decir, al realizar la inversión).

3. La rentabilidad financiero-fiscal de una inversión ha sido del 2 % y la tasa de inflación de este periodo, del 3,7 %.

   En este caso, la rentabilidad real es negativa:

$$\left(\frac{1+0{,}02}{1+0{,}037}-1\right)\cdot 100 = 1{,}64\%$$

   La inflación ha consumido toda la rentabilidad financiero-fiscal generada por la inversión y, además, una parte del capital invertido.

Así pues, para calcular la rentabilidad real de un activo deben tenerse en cuenta:

- Los gastos y comisiones que cobra la entidad financiera.
- La carga fiscal que debe soportar el propietario.
- La tasa de inflación.

Es importante diferenciar todas estas medidas de rentabilidad, ya que:

- Es muy posible que las empresas estén interesadas en conocer y comparar la TIR de sus inversiones financieras o bien la TRE, si las tasas de reinversión son muy diferentes a la TIR.
- Algunos particulares tendrán suficiente con conocer la rentabilidad simple, pero otros quizás prefieran la efectiva para comparar distintos productos de su entidad o incluso de la competencia.
- Generalmente aquellos particulares con mayor nivel de renta estarán más sensibilizados por el coste de los impuestos. La rentabilidad real, que tiene en cuenta los aspectos fiscales, les resultará muy útil a la hora de comparar diferentes productos, lo que hará aumentar su preferencia por aquellos con ventajas fiscales o bajo nivel de tributación.
- Cuando el ahorro es a largo plazo (por ejemplo, pensando en la jubilación dentro de varios años) al cliente suele preocuparle también la inflación.

Como ves, el cálculo de la rentabilidad se refiere a una de las variables que suelen intervenir en operaciones financieras: el tipo de interés. En cualquier operación financiera, además del tipo de interés, se manejan los conceptos de capital futuro, capital actual y tiempo.

5. ANEXOS

Anexo 1. Interés simple y compuesto

Supón que se efectúa un préstamo de 10 000,00 EUR a 5 años al 10 % anual.

Con intereses simples, para calcular el capital final deberíamos añadir un importe de 5 000,00 EUR de intereses (10 000,00 · 0,10 · 5) y obtendríamos un capital final de 15 000,00 EUR.

Con intereses compuestos, consideraríamos que los intereses se capitalizan anualmente y producen un nuevo capital sobre el cual calcular los intereses del siguiente periodo. Obtendríamos, por lo tanto, la tabla siguiente:

Año	Capital inicial	Intereses	Capital final
1	10 000,00	1 000,00	11 000,00
2	11 000,00	1 100,00	12 100,00
3	12 100,00	1 210,00	13 310,00
4	13 310,00	1 331,00	14 641,00
5	14 641,00	1 464,10	16 105,10

Como puedes observar, al capitalizar anualmente los intereses, éstos producen intereses adicionales (1 105,10 EUR en este caso).

Anexo 2. Deducción de la fórmula general de la capitalización compuesta

Supongamos que un capital inicial (C_0) se capitaliza, a interés compuesto anual, durante n años, siendo i el tipo de interés anual expresado en tanto por uno. Los intereses se abonan al final de cada año.

Los intereses producidos en el primer año (I_1) serán:

$$I_1 = C_0 \cdot i \cdot 1 = C_0 \cdot i$$

(Suprimiendo el factor 1, porque no altera el producto.)

Por tanto, el capital al comienzo del segundo año será la suma del capital inicial más los intereses; es decir:

$$C_1 = C_0 + I_1 = C_0 + \underbrace{C_0 \cdot i}_{I_1}$$

y, sacando C_0 como factor común:

$$C_1 = C_0 (1 + i)$$

Los intereses producidos en el segundo año (I_2) se obtendrán multiplicando el capital disponible al inicio (C_1) por el tipo de interés:

$$I_2 = C_1 \cdot i$$

De ahí que el capital al final del segundo año sea la suma del capital y sus intereses:

$$C_2 = C_1 + I_2 = C_1 + \underbrace{C_1 \cdot i}_{I_2} = C_1 (1 + i)$$

Sustituyendo el valor de C_1 por la expresión equivalente deducida antes,

$$C_1 = C_0 (1 + i)$$

obtenemos:

$$C_2 = \underbrace{C_1 (1 + i)}_{C_1} = C_0 (1 + i) (1 + i) = C_0 (1 + i)^2$$

De modo que:

$$C_1 = C_0\,(1 + i)$$

$$C_2 = C_0\,(1 + i)^2$$

Siguiendo con el mismo razonamiento obtendríamos:

$$C_3 = C_0\,(1 + i)^3$$

$$C_4 = C_0\,(1 + i)^4$$

(El exponente del factor que aparece entre paréntesis es el número de periodos en que se acumulan los intereses; en este caso, corresponde a años.)

Generalizando, la fórmula aplicable para cualquier duración de la capitalización es:

$$\boxed{C_n = C_0\,(1 + i)^n}$$

Siendo:

C_n = capital final.
C_0 = capital inicial.
i = tipo de interés anual (expresado en tanto por uno).
n = tiempo total de capitalización, en años.

Anexo 3. Cálculo de la fórmula del tipo de interés (interés compuesto)

Partiendo de la fórmula general $C_n = C_0\,(1 + i)^n$, se puede traspasar C_0 al primer miembro:

$$\frac{C_n}{C_0} = (1+i)^n$$

Para despejar i hay que eliminar en primer lugar el exponente n sacando la raíz enésima de ambos miembros:

$$\sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} = \sqrt[n]{(1+i)^n}\,; \qquad \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} = 1+i$$

Por último, se traspasa el 1 al primer miembro para obtener:

$$\sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1 = i \quad \text{o, lo que es lo mismo:} \quad \boxed{i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1} \qquad \textbf{[28]}$$

Ejemplo

Calcular el tipo de interés nominal necesario para que 20 000,00 EUR tengan un valor futuro de 21 000,00 EUR dentro de 3 años, si el cálculo se hace a interés compuesto.

$$i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{21\,000{,}00}{20\,000{,}00}} - 1 = \sqrt[3]{1{,}05} - 1$$

Para calcular la raíz cúbica se puede recurrir a la calculadora.

$$i = \sqrt[3]{1{,}05} - 1 = 1{,}0163964 - 1 = 0{,}0163964$$

Puesto que i viene expresado en tanto por uno, el resultado debe multiplicarse por 100 para obtener el tanto por ciento, que será 1,64 % (por redondeo decimal).

Anexo 4. Cálculo de la fórmula del tiempo (interés compuesto)

Partiendo de la fórmula $C_n = C_0\,(1 + i)^n$, se puede traspasar C_0 al primer miembro:

$$\frac{C_n}{C_0} = (1 + i)^n$$

Para poder despejar n, que es un exponente, hay que calcular logaritmos en ambos términos de la igualdad:

$$log\ \frac{C_n}{C_0} = log\ (1 + i)^n$$

Al hacer esta operación pueden aplicarse dos reglas básicas de las operaciones con logaritmos:

- El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor. Es decir:

$$log\ \frac{C_n}{C_0} = log\ C_n - log\ C_0$$

- El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base. Es decir:

$$log\ (1 + i)^n = n \cdot log\ (1 + i)$$

De ahí que podamos escribir la igualdad $\frac{C_n}{C_0} = log\ (1 + i)^n$. De este modo:

$$log\ C_n - log\ C_0 = n \cdot log\ (1 + i)$$

Para despejar n, traspasamos $log\ (1 + i)$ al primer miembro, dividiendo:

$$\frac{log\ C_n - log\ C_0}{log\ (1 + i)} = n$$

o, lo que es lo mismo:

$$\boxed{n = \frac{log\ C_n - log\ C_0}{log\ (1 + i)}} \qquad \textbf{[29]}$$

Para calcular logaritmos necesitaremos la calculadora.

Ejemplo

Calcular el tiempo necesario para que un capital actual de 20 000,00 EUR tenga un valor futuro de 21 000,00 EUR al 1,64 % nominal anual con intereses compuestos.

$$n = \frac{log\ C_n - log\ C_0}{log\ (1+i)} = \frac{log\ 21\,000{,}00 - log\ 20\,000{,}00}{log\ (1+0{,}0164)} =$$

$$= \frac{4{,}32222 - 4{,}30103}{0{,}00706} = \frac{0{,}02119}{0{,}00706} = 3 \text{ años}$$

Anexo 5. Fórmula del descuento racional o matemático

El descuento racional se obtiene aplicando el tipo de interés (i) sobre el valor efectivo (V_e) durante el plazo (n) a que se refiere el descuento. Es decir:

$$D = V_e \cdot i \cdot n$$

Pero esta fórmula no puede aplicarse normalmente, dado que se desconoce el valor efectivo (V_e). El valor conocido es el nominal (V_n), que figura en el efecto o título que se descuenta. Así pues, convendrá obtener la fórmula en función de V_n y no de V_e.

Si partimos de la fórmula general de la capitalización:

$$C_n = C_0 \,(1 + i \cdot n)$$

y sustituimos C_n (capital final) por V_n (valor nominal), y C_0 (capital actual) por V_e (valor efectivo), obtenemos:

$$V_n = V_e \,(1 + i \cdot n)$$

Despejando V_e:

$$V_e = \frac{V_n}{1 + i \cdot n}$$

Si sustituimos ahora este valor de V_e en la fórmula general del descuento racional, obtendremos:

$$D = V_e \cdot i \cdot n = \frac{V_n}{1 + i \cdot n} \cdot i \cdot n$$

Es decir:

$$\boxed{D = \frac{V_n \cdot i \cdot n}{1 + i \cdot n}} \qquad \textbf{[21]}$$

Aunque hemos partido del valor efectivo, al final tenemos una fórmula en que aparece el valor nominal, que es el que conocemos.

Fíjate en la diferencia entre la fórmula del descuento comercial y la del descuento racional:

Descuento comercial = $V_n \cdot i \cdot n$

Descuento racional = $\dfrac{V_n \cdot i \cdot n}{1 + i \cdot n}$

Comparando estas dos fórmulas, se deduce fácilmente que el descuento comercial es mayor que el racional, porque en este último aparece el divisor ($1 + i \cdot n$) que siempre tiene un valor superior a la unidad.

Anexo 6. Valor del capital actual en función de la frecuencia de actualización

En la actualización a interés compuesto, cuanto mayor es la frecuencia de cálculo de intereses más veces se aplican los descuentos, con lo cual se devengan más intereses y menor es el capital actual obtenido. Se produce, pues, el efecto inverso al obtenido en la capitalización.

En la tabla que sigue puedes comprobar la afirmación anterior para un capital de 10 000,00 EUR, actualizado durante 1 año aplicando un tipo de interés nominal del 4 % anual.

Frecuencia de actualización	Valor efectivo (un año)
Anual	9 615,38 EUR
Semestral	9 611,69 EUR
Trimestral	9 609,80 EUR
Mensual	9 608,53 EUR
Semanal	9 608,04 EUR
Diaria*	9 607,92 EUR
**(año de 365 días)*	

Anexo 7. Deducción de la fórmula del tipo de interés efectivo anual

El tipo de interés efectivo es igual a los intereses producidos por un capital inicial de 1,00 EUR durante 1 año y tiene un valor diferente al del tipo de interés nominal (i) cuando se devengan intereses más de una vez al año.

Observación previa

Cuando la frecuencia de capitalización (k) es superior a 1, es decir, cuando se liquidan intereses más de una vez al año, el tipo de interés aplicado en cada periodo de capitalización será la parte proporcional del tipo de interés anual. Es decir: i/k.

Por ejemplo, si i = 4 % y se devengan intereses trimestralmente, el tipo de interés de cada trimestre, o interés efectivo trimestral, será 4 % : 4 = 1 % = 0,01.

Cálculo del tipo de interés efectivo

1. Para calcular el tipo de interés efectivo anual hemos de hallar, en primer lugar, el capital final obtenido a partir de un capital inicial de 1,00 EUR en 1 año.

Se calculará aplicando la fórmula:

$$C_n = C_0\,(1 + i)^n \qquad \textbf{[25]}$$

Como: C_0 = 1,00 EUR, $i = i/k$ y $n = k$ (periodos comprendidos en 1 año), la fórmula que nos da el valor del capital final (C_n) será:

$$C_n = 1\left(1+\frac{i}{k}\right)^k = \left(1+\frac{i}{k}\right)^k$$

Por ejemplo, si i = 0,1 y k = 4:

$$C_n = \left(1+\frac{0{,}1}{4}\right)^4 = (1+0{,}025)^4 = 1{,}1038129$$

2. Restando de este capital final el valor del capital inicial (1,00 EUR), se obtiene la fórmula que expresa los intereses anuales producidos por 100,00 EUR:

$$\left(1+\frac{i}{k}\right)^k - 1$$

En el ejemplo, $$\left(1+\frac{0{,}1}{4}\right)^4 - 1 = 1{,}1038129 - 1 = 0{,}1038129$$

3. Estos intereses anuales se han calculado teniendo en cuenta el efecto de acumulación de los intereses (pues se ha aplicado la fórmula del interés compuesto). De ahí que:

$$\text{Tipo de interés anual efectivo} = \left(1+\frac{i}{k}\right)^{k} - 1 \qquad \textbf{[37]}$$

Es una fórmula que nos permite calcularlo partiendo del tipo de interés nominal (*i*) y la frecuencia de capitalización (*k*).

APÉNDICE – FORMULARIO

Formulario

Símbolos utilizados

C = Capital.
C_0 = Capital actual (o inicial).
C_n = Capital futuro (o final).
D = Descuento.
I = Valor de los intereses.
i = Tipo de interés nominal (en tanto por uno anual).
V_e = Valor efectivo (en operación de descuento).
V_n = Valor nominal (en operación de descuento).
n = Tiempo en años.
N = Números comerciales.
k = Frecuencia de capitalización y descuento (número de veces al año).

CAPITALIZACIÓN A INTERÉS SIMPLE

Intereses

Fórmula general: $I = C_0 \cdot i \cdot n$ **[1]**
Fórmulas derivadas:

— Tipo de interés nominal $i = \dfrac{I}{C_0 \cdot n}$ **[2]**

— Tiempo $n = \dfrac{I}{C_0 \cdot i}$ **[3]**

— Capital actual $C_0 = \dfrac{I}{i \cdot n}$ **[4]**

Capital futuro o final

Fórmula general: $C_n = C_0 + I$, o bien $C_n = C_0\,(1 + i \cdot n)$ **[5]**
Fórmulas derivadas:

— Capital actual $C_0 = \dfrac{C_n}{1 + i \cdot n}$ **[6]**

— Tipo de interés nominal $i = \dfrac{C_n - C_o}{C_0 \cdot n}$ **[7]**

— Tiempo $n = \dfrac{C_n - C_0}{C_0 \cdot i}$ **[8]**

Números comerciales

Fórmula: $N = C \cdot n$ (n expresado en días) **[9]**

Intereses totales

Fórmula: $I = i \cdot \dfrac{N_1 + N_2 + N_3 + ... + N_n}{365}$ **[10]**

Relación entre tipo de interés al vencimiento (*i*) y anticipado (*i'*)

— Tipo de interés anticipado $i' = \dfrac{i}{1 + i \cdot n}$ **[11]**

— Tipo de interés al vencimiento $i = \dfrac{i'}{1 + i' \cdot n}$ **[12]**

DESCUENTO A INTERÉS SIMPLE

Intereses

Fórmula general: $D = V_n - V_e$ **[13]**
(conociendo el valor nominal y el efectivo)
Fórmulas derivadas:

— Valor nominal $V_n = D + V_e$ **[14]**

— Valor efectivo $V_e = V_n - D$ **[15]**

Descuento comercial

Fórmula general: $D = V_n \cdot i \cdot n$ **[16]**
Fórmulas derivadas:

— Valor nominal $V_n = \dfrac{D}{i \cdot n}$ **[17]**

— Tipo de interés nominal $i = \dfrac{D}{V_n \cdot n}$ **[18]**

— Tiempo $n = \dfrac{D}{V_n \cdot i}$ **[19]**

Descuento racional

Fórmula general: $D = V_e \cdot i \cdot n$ **[20]**

O bien $D = \dfrac{V_n \cdot i \cdot n}{1 + i \cdot n}$ **[21]**

Fórmula derivada:

— Tipo de interés nominal $$i = \frac{D}{V_e \cdot n}$$ **[22]**

Capital actual o inicial

En el descuento comercial $V_e = V_n\,(1 - i \cdot n)$ **[23]**

En el descuento racional $$V_e = \frac{V_n}{1 + i \cdot n}$$ **[24]**

CAPITALIZACIÓN A INTERÉS COMPUESTO

Capital futuro o final

- Con frecuencia igual a 1

Fórmula: $C_n = C_0\,(1 + i)^n$ **[25]**
Fórmulas derivadas:

— Factor de capitalización $(1 + i)^n$ **[26]**

— Capital inicial $$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$ **[27]**

— Tipo de interés $$i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1$$ **[28]**

— Tiempo $$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log\,(1+i)}$$ **[29]**

- Con frecuencia superior a 1

Fórmulas: $$C_n = C_0\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{n \cdot k}$$ **[30]**

$C_n = C_0$ (1+ tipo de interés efectivo)$^{\text{número de periodos}}$

$$i = \left(\sqrt[n \cdot k]{\frac{C_n}{C_0}} - 1\right) \cdot k$$ **[31]**

ACTUALIZACIÓN A INTERÉS COMPUESTO

Capital actual aplicando descuento racional

- Con frecuencia igual a 1

Fórmula: $$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$ **[32] [27]**

Fórmulas derivadas:

— Factor de actualización $$\frac{1}{(1+i)^n} \quad \text{o} \quad (1+i)^{-n}$$ **[33]**

— Descuento $$D = C_n\left(1-\frac{1}{(1+i)^n}\right)$$ **[34]**

- Con frecuencia superior a 1

Fórmula: $$C_0 = \frac{C_n}{\left(1+\frac{i}{k}\right)^{n\cdot k}}$$ **[35]**

TIPO DE INTERÉS EFECTIVO

- Teniendo en cuenta los intereses de un año, en el supuesto de acumularse al capital

Fórmula: $$\text{Tipo de interés efectivo} = \left(\frac{C_n - C_0}{C_0}\right)$$ **[36]**

- Teniendo en cuenta el tipo de interés nominal y la frecuencia de capitalización

Fórmula: $$\text{Tipo de interés efectivo} = \left(1+\frac{i}{k}\right)^k - 1$$ **[37]**

RENTABILIDAD

Símbolos utilizados

V_F = Valor al final del periodo considerado
V_I = Valor inicial o de compra
D = Dividendos u otros rendimientos
G = Gastos

Rentabilidad simple (RS)

Fórmula: $$\mathrm{RS} \frac{(V_F + D) - (V_I + G)}{V_I} \qquad [38]$$

Tasa Interna de Rentabilidad (TIR)

De la siguiente ecuación se deduce la TIR, representada por *i*.

Ecuación: $$V_I = \frac{D_1}{(1+i)^{n_1}} + \frac{D_2}{(1+i)^{n2}} + \frac{D_3}{(1+i)^{n_3}} + \ldots \qquad [39]$$

Tasa de Rentabilidad Efectiva (TRE)

Fórmula: $$i = \sqrt[n]{\frac{V_F}{V_1}} - 1 \qquad [40]$$

siendo $V_F = D_1 (1 + i_1)^{n1} + D_2 (1 + i_2)^{n2} + D_3 (1 + i_3)^{n3} + \ldots$

Tasa de Rentabilidad Geométrica (TRG)

Fórmula: $TRG = \sqrt[n]{(1+RS_1)\cdot(1+RS_2)\cdot\ldots\cdot(1+RS_n)} - 1$ **[41]**